Optimizasyona Giriş

T.C. Trakya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kontrol Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Işık İlber Sırmatel

sirmatel.github.io/teaching/EEE126/

Konu listesi

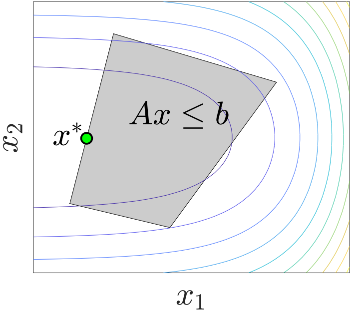
1. Temel kavramlar
2. Önemli problem sınıfları
3. Yöntemlerin sınıflandırılması
4. Algoritmalar
5. Uygulamalar

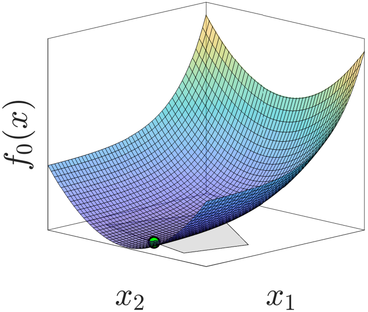
Bölüm 1

Temel kavramlar

Optimizasyonun tanımı

kısıtlı seçenekler
arasından en iyiyisini seçmek





optimizasyonun unsurları:

- modelleme (problemleri kurmak)
- teori (yöntemlerin analizi)
- algoritmalar (problemleri çözmek)

Optimizasyon problemi (bir standart form)

$$\boxed{\begin{aligned} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & f(x) \\ \text{bağlı} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{aligned}}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ (optimizasyon değişkenleri vektörü)
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (amaç fonksiyonu)
- $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (eşitsizlik kısıtları fonksiyonu)
- $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ (eşitlik kısıtları fonksiyonu)

Optimizasyon problemlerinin unsurları

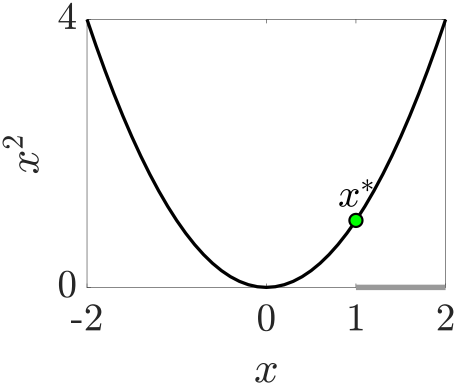
- **Amaç fonksiyonu** $f(x)$ optimizasyonun amacını bir niceliği minimize/maksimize etmek olarak ifade eder.

- **Optimizasyon değişkenleri vektörü** $x \in \mathbb{R}^n$ optimizasyon ile sayısal değerini bulmak istediğimiz değişkenlerden oluşan vektördür.

- **Olanaklı küme** Ω, x vektörünün elemanı olmak üzere kısıtlandığı kümeyi belirtir. Bu küme x'in sağlaması gereken kısıtları belirler ve genellikle $g(x) \leq 0$ (eşitsizlik kısıtları) ve $h(x) = 0$ (eşitlik kısıtları) ile ifade edilir.
$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \leq 0,\, h(x) = 0\}$$

Örnek

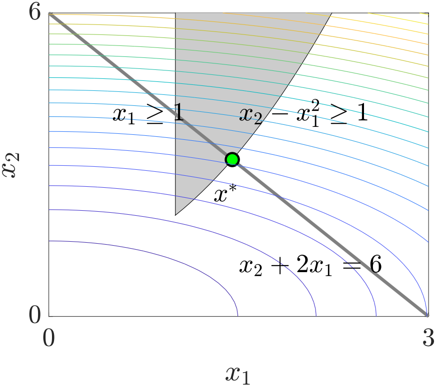
eşitsizlik kısıtlı, bir boyutlu optimizasyon problemi



$$\boxed{\begin{array}{rl} \underset{x\in\mathbb{R}}{\text{minimize}} & x^2 \\ \text{bağlı} & 1 - x \leq 0 \end{array}}$$

Örnek

eşitlik ve eşitsizlik kısıtlı, iki boyutlu optimizasyon problemi



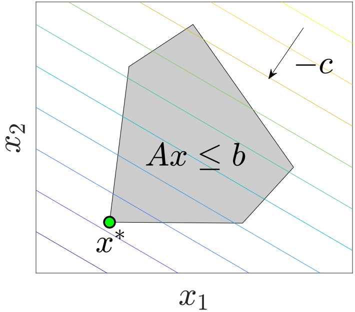
$$
\begin{aligned}
\underset{x \in \mathbb{R}^2}{\text{minimize}} \quad & x_1^2 + x_2^2 \\
\text{bağlı} \quad & 1 + x_1^2 \leq x_2 \\
& 1 \leq x_1 \\
& x_2 + 2x_1 = 6
\end{aligned}
$$

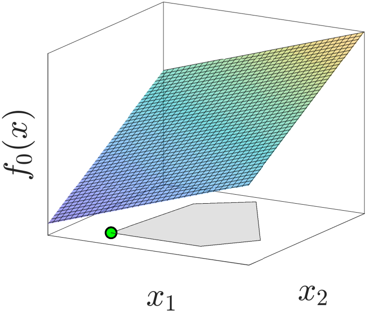
Bölüm 2

Önemli problem sınıfları

Doğrusal program (LP)

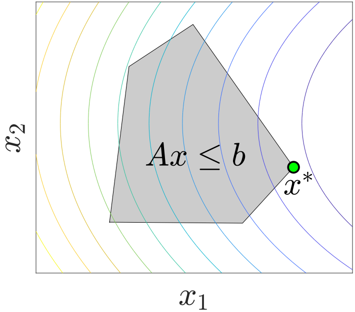
$$\begin{array}{rl} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & c^T x \\ \text{bağlı} & Ax \leq b \\ & Ex = e \end{array}$$

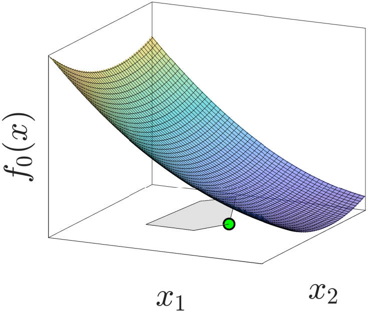




Karesel program (QP)

$$\boxed{\begin{aligned} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & x^TQx + c^Tx \\ \text{bağlı} \quad & Ax \le b \\ & Ex = e \end{aligned}}$$

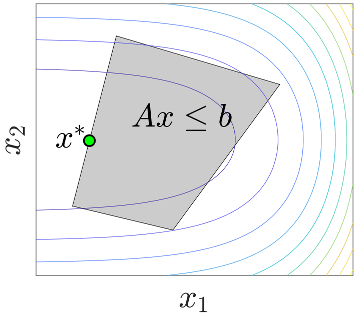


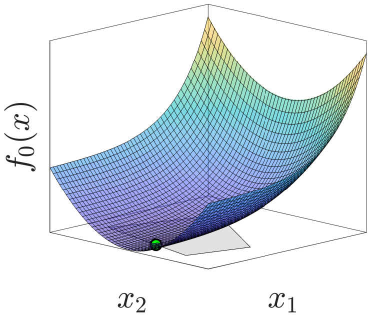


Dışbükey program (convex program)

$$\boxed{\begin{array}{rl} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & f(x) \\ \text{bağlı} & x \in \Omega \end{array}}$$

(f dışbükey fonksiyon, Ω dışbükey küme)

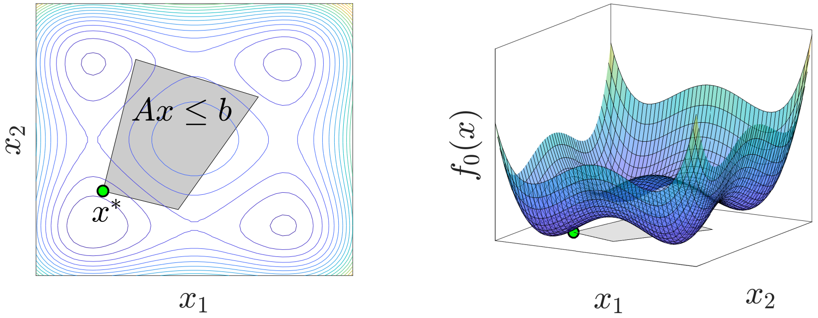




Doğrusal-olmayan program (NLP)

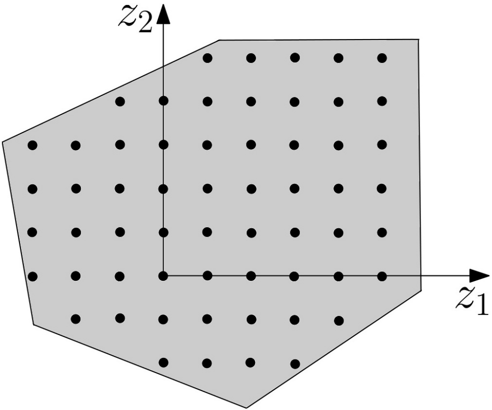
$$\boxed{\begin{array}{rl} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & f(x) \\ \text{bağlı} & g(x) \le 0 \\ & h(x) = 0 \end{array}}$$

(f, g ve h türevlenebilir)



Karma-tamsayılı program (MIP)

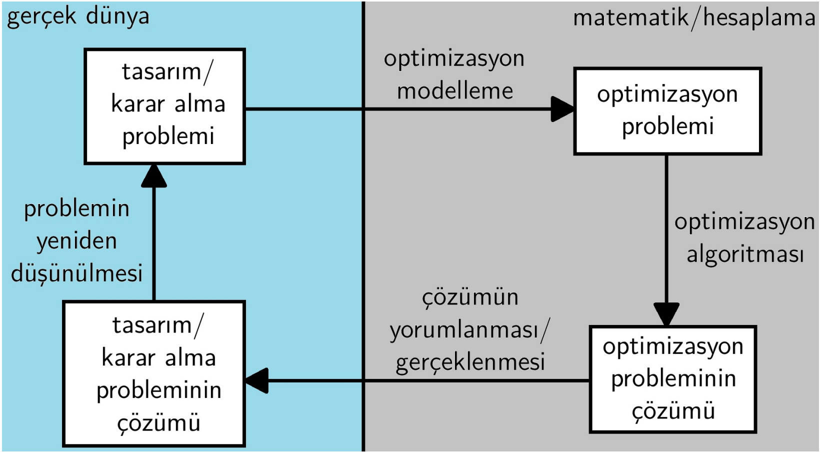
$$\begin{aligned} \underset{x\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{Z}^m}{\text{minimize}} \quad & f(x,z) \\ \text{bağlı} \quad & g(x,z) \leq 0 \\ & h(x,z) = 0 \end{aligned}$$



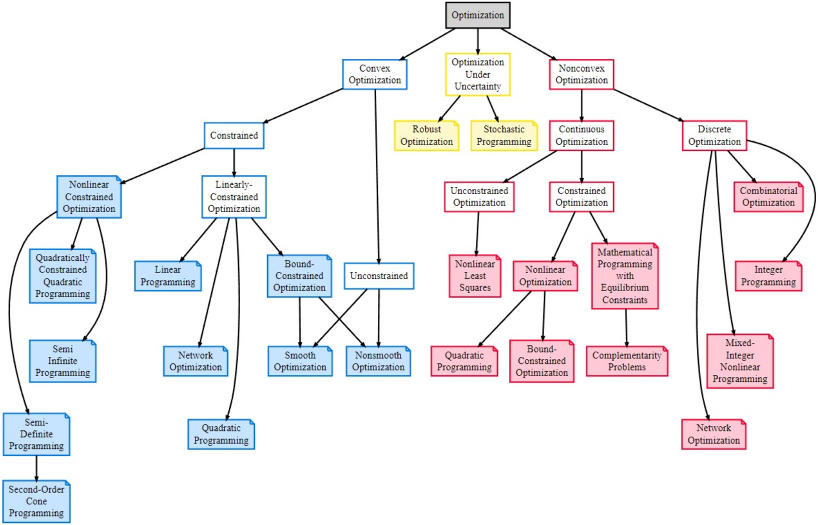
Bölüm 3

Yöntemlerin sınıflandırılması

Optimizasyon prosedürü



Optimizasyon problemi çeşitleri



Kaynak: https://neos-guide.org/guide/types/

Optimizasyon algoritması çeşitleri

kesin (exact) algoritmalar (sınırlı sürede çözümü bulma garantisi vardır)

- birinci-derece yöntemler
  - gradyan iniş
  - momentum
- ikinci-derece yöntemler
  - Newton yöntemi
  - yarı-Newton yöntemleri
- kısıtlı optimizasyon
  - aktif küme yöntemi
  - ardışık karesel optimizasyon
  - iç nokta yöntemleri
- ...

buluşsal (heuristic) algoritmalar (sınırlı sürede çözümü bulma garantisi yoktur)

- genetik algoritmalar
- benzetilmiş tavlama
- parçacık sürü opt.
- ...

fuzuli algoritmalar

- grey wolf optimizer
- harmony search algorithm
- firefly algorithm
- ...

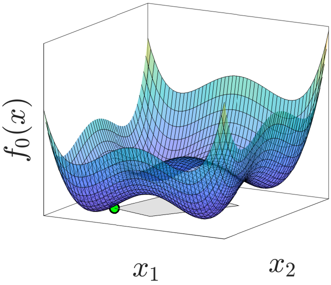
kaynak: https://doi.org/10.1111/itor.13176

Sürekli/ayrık optimizasyon

sürekli program

$$\begin{array}{|rl|}\hline \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & f(x) \\ \text{bağlı} & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \\ \hline\end{array}$$

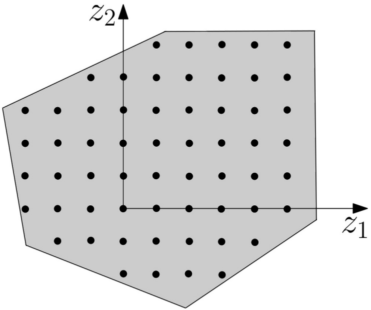
x reel vektör



ayrık program

$$\begin{array}{|rl|}\hline \underset{x\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{Z}^q}{\text{minimize}} & f(x,z) \\ \text{bağlı} & g(x,z) \leq 0 \\ & h(x,z) = 0 \\ \hline\end{array}$$

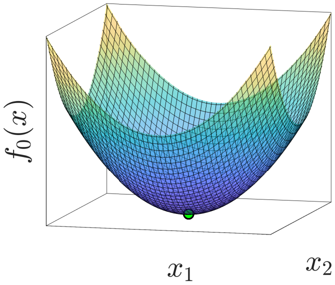
x reel, z tamsayılı vektör



Kısıtsız/kısıtlı optimizasyon

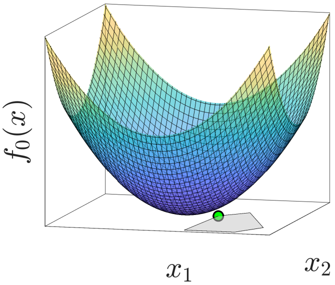
kısıtsız program

$$\boxed{\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f(x)}$$



kısıtlı program

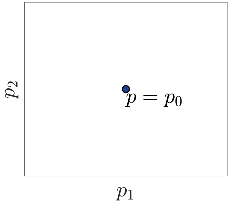
$$\boxed{\begin{array}{rl} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & f(x) \\ \text{bağlı} & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{array}}$$



Belirsizlik içermeyen/içeren optimizasyon

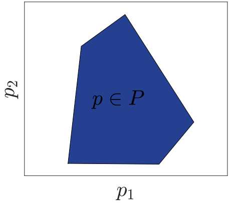
deterministik (belirsizlik içermeyen) program

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & f(x,p) \\ \text{bağlı} \quad & x \in \Omega_p,\; p = p_0 \end{aligned}$$



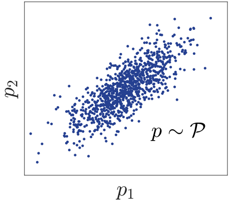
dayanıklı (robust) program

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & \operatorname*{maks.}_{p\in P} f(x,p) \\ \text{bağlı} \quad & x \in \Omega_p \end{aligned}$$



stokastik program

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & \mathbb{E}\{f(x,p)\} \\ \text{bağlı} \quad & x \in \Omega_p,\; p \sim \mathcal{P} \end{aligned}$$

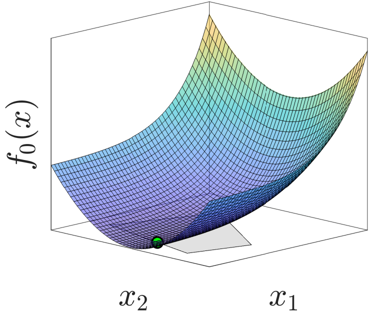


Dışbükey/dışbükey-olmayan optimizasyon

dışbükey program

$$\boxed{\begin{array}{rl} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & f(x) \\ \text{bağlı} & x \in \Omega \end{array}}$$

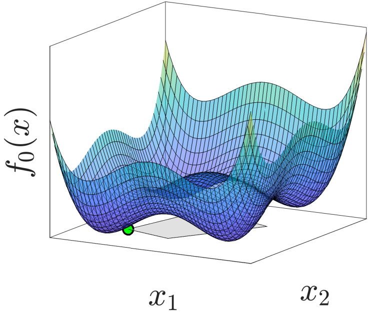
f dışbükey fonksiyon ve
Ω dışbükey küme



dışbükey-olmayan program

$$\boxed{\begin{array}{rl} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & f(x) \\ \text{bağlı} & x \in \Omega \end{array}}$$

f dışbükey olmayan fonks. veya
Ω dışbükey olmayan küme



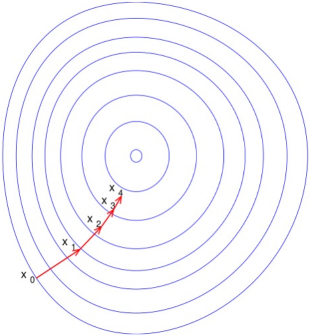
Bölüm 4

Algoritmalar

Gradyan iniş (*gradient descent*)

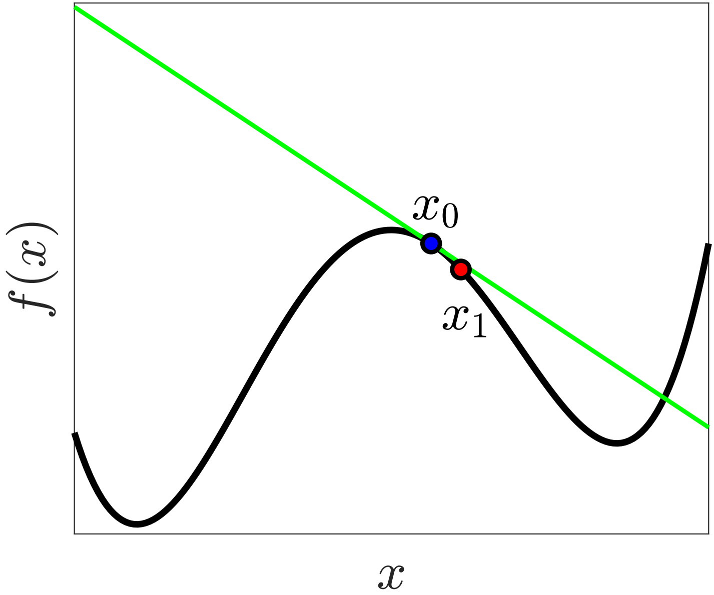
kısıtsız optimizasyon problemi ($\nabla f(x)$ mevcut)

$$\boxed{\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f(x)}$$

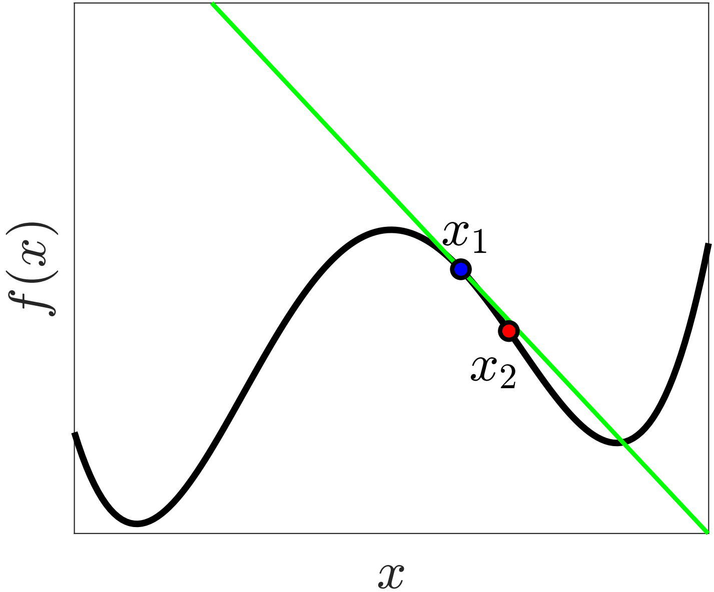


verilenler:	başlangıç noktası $x_0 \in \mathbb{R}^n$
	tolerans $\epsilon > 0$
tekrarla:	$k = 0, 1, 2, \ldots$ için:
	$1)$ $\Delta x_k = -\nabla f(x_k)$
	$2)$ adım boyu γ'yı seç
	$3)$ $x_{k+1} = x_k + \gamma \Delta x_k$
dur:	$\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon$ ise

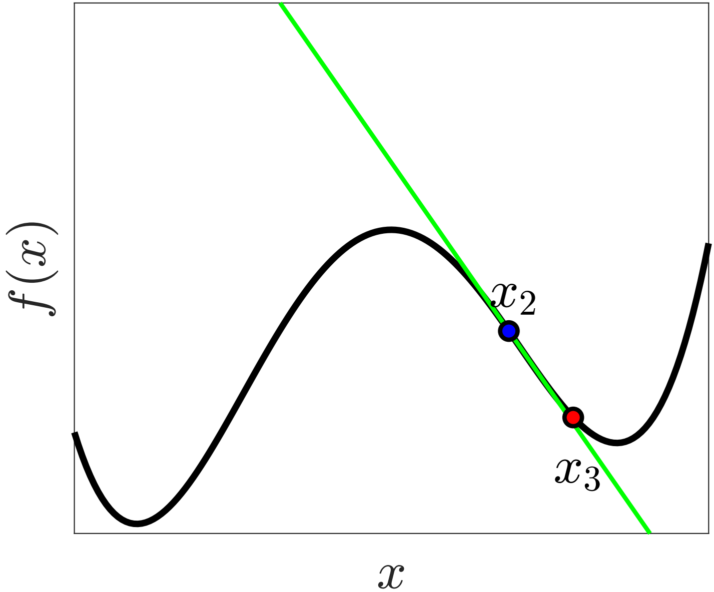
Gradyan iniş - Geometrik yorum



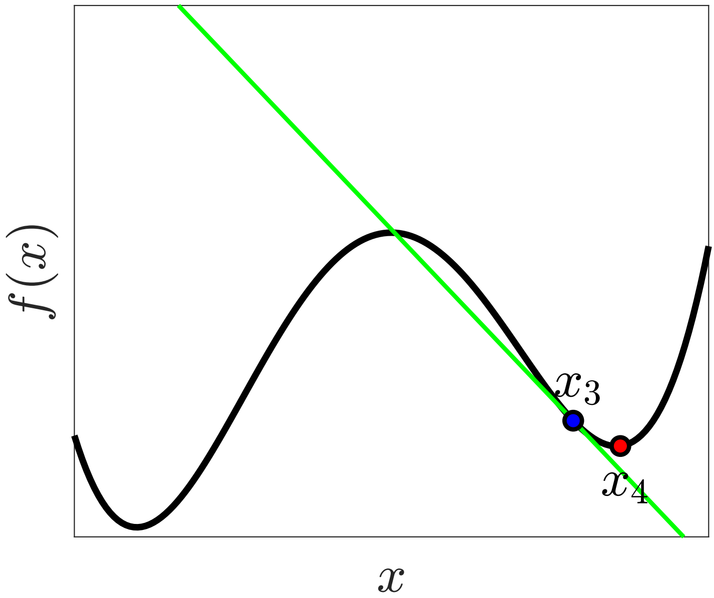
Gradyan iniş - Geometrik yorum



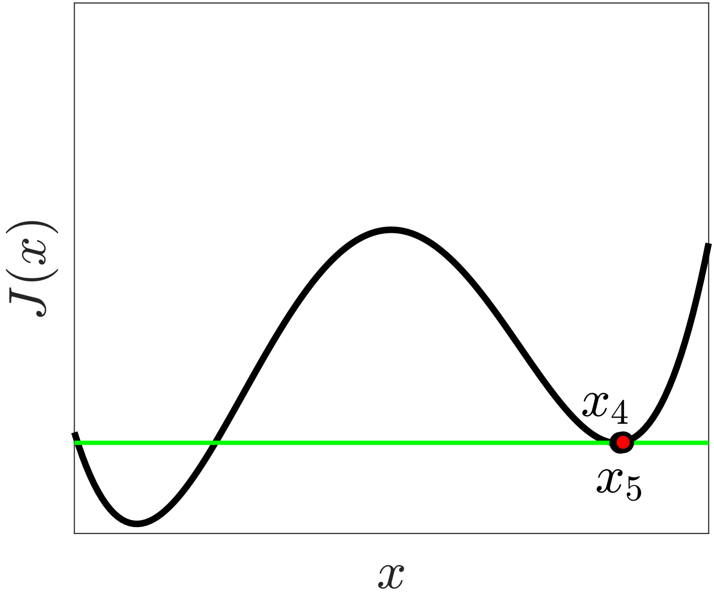
Gradyan iniş - Geometrik yorum



Gradyan iniş - Geometrik yorum



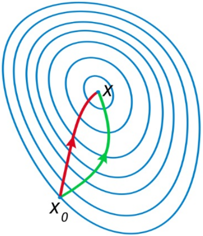
Gradyan iniș - Geometrik yorum



Newton yöntemi

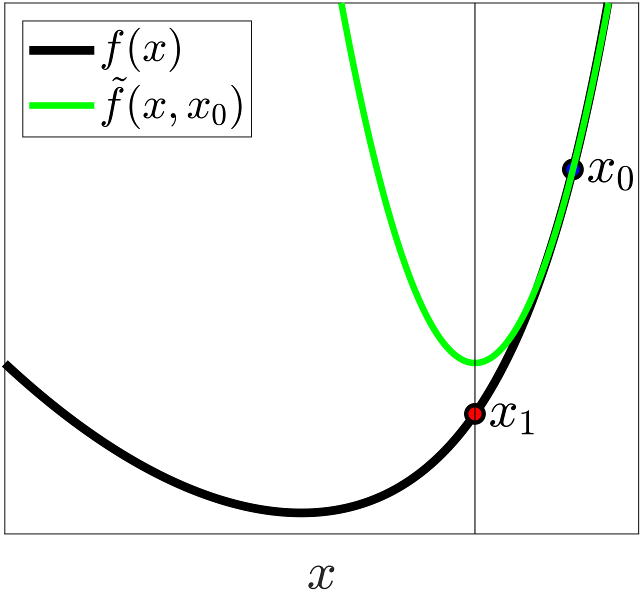
kısıtsız optimizasyon problemi ($\nabla f(x)$ ve $\nabla^2 f(x)$ mevcut)

$$\boxed{\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f(x)}$$

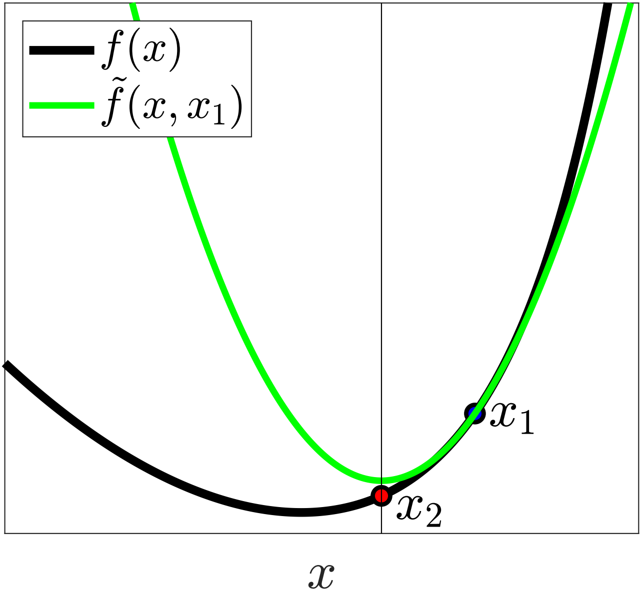


verilenler:	başlangıç noktası $x_0 \in \mathbb{R}^n$
	tolerans $\epsilon > 0$
tekrarla:	$k = 0, 1, 2, \ldots$ için:
	1) $\Delta x_k = -\nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$
	2) $\lambda^2 = \nabla f(x_k)^T \nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$
	3) adım boyu γ'yı seç
	4) $x_{k+1} = x_k + \gamma \Delta x_k$
dur:	$\lambda^2/2 \leq \epsilon$ ise

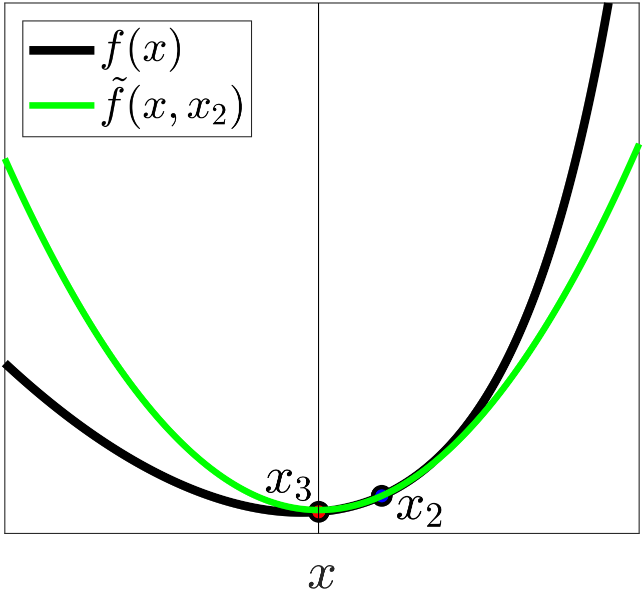
Newton yöntemi - Geometrik yorum



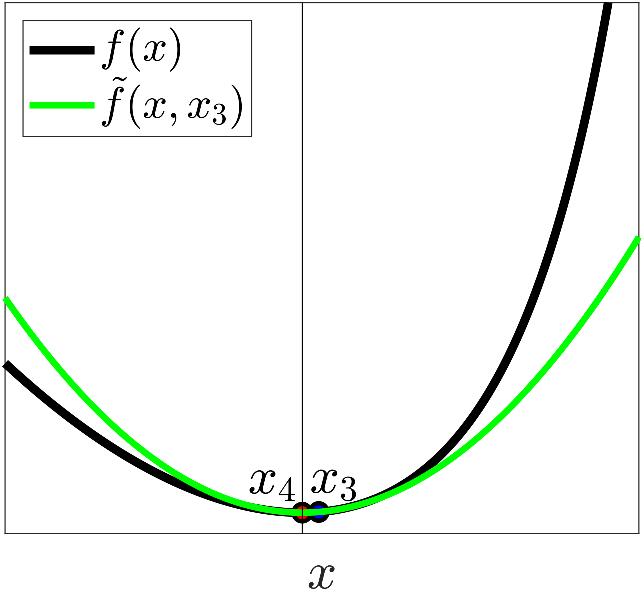
Newton yöntemi - Geometrik yorum



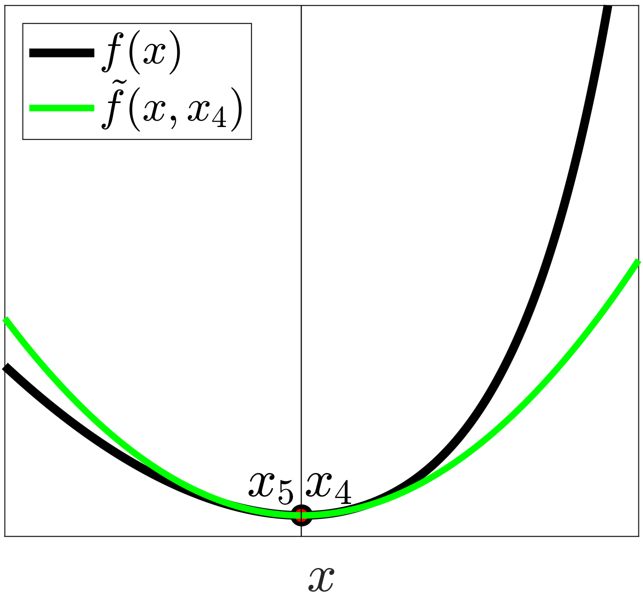
Newton yöntemi - Geometrik yorum



Newton yöntemi - Geometrik yorum



Newton yöntemi - Geometrik yorum



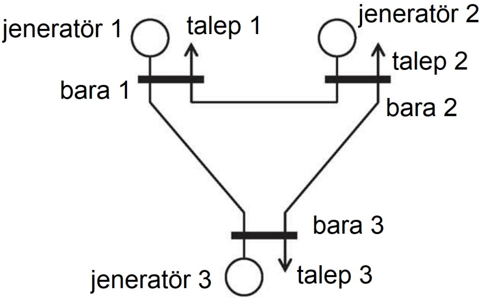
Bölüm 5

Uygulamalar

Üretim planlama (LP)

$$\begin{array}{|rl|}\hline \underset{\text{üretim}}{\text{maksimize}} & \text{kazanç} \\ \text{bağlı} & \text{üretim} \leq \text{hammadde} \\ & \text{sipariş} \leq \text{üretim} \\ \hline \end{array}$$

Optimal güç akışı (QP)

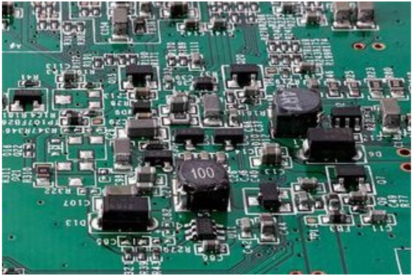


$$
\begin{array}{|rl|}
\hline
\underset{\text{üretim}}{\text{minimize}} & \text{maliyet} \\
\text{bağlı} & \text{üretim} = \text{talep} \\
 & \text{iletim} \leq \text{limitler} \\
\hline
\end{array}
$$

Birim taahhüt problemi (MIQP)

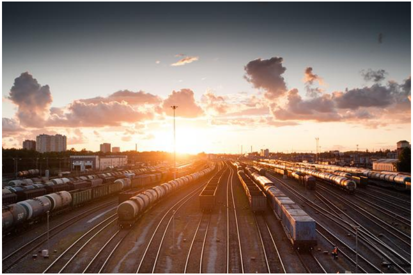
$$\boxed{\begin{array}{rl} \underset{\text{operasyon}}{\text{minimize}} & \text{maliyet} \\ \text{bağlı} & \text{operasyon süresince:} \\ & \quad \text{operasyon} \leq \text{güç limitleri} \\ & \quad \text{talep} \leq \text{operasyon} \end{array}}$$

Devre tasarımı (GP)



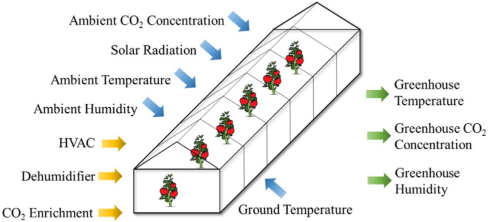
$$\boxed{\begin{array}{rl} \underset{\text{elemanlar}}{\text{minimize}} & \text{zaman gecikmesi} \\ \text{bağlı} & \text{elemanlar} \leq \text{güç limiti} \\ & \text{elemanlar} \leq \text{alan limiti} \end{array}}$$

Lojistik planlama (LP)



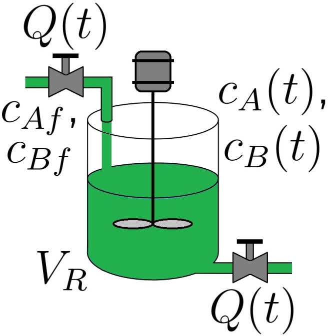
$$\boxed{\begin{aligned} \underset{\text{nakliye}}{\text{minimize}} \quad & \text{maliyet} \\ \text{bağlı} \quad & \text{nakliye} \leq \text{üretim kapasitesi} \\ & \text{talep} \leq \text{nakliye} \end{aligned}}$$

Sera iklim kontrolü (QP, NLP)



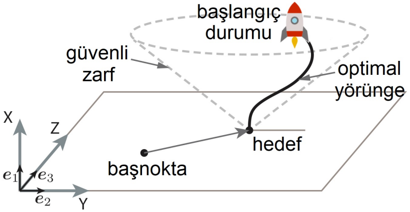
$$\begin{array}{rl} \underset{\text{girişler}}{\text{minimize}} & \text{maliyet} \\ \text{bağlı} & \text{operasyon süresince:} \\ & \quad \text{yörünge} \leftrightarrow \text{sera dinamiği} \\ & \quad \text{girişler} \leq \text{giriş limitleri} \\ & \quad \text{yörünge} \in \text{iklim limitleri} \end{array}$$

Kimyasal proses kontrol (NLP)



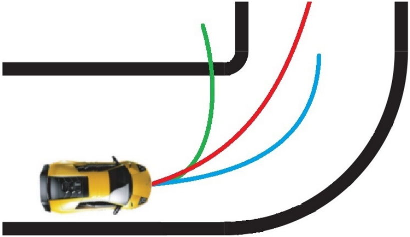
maksimize girişler	kazanç
bağlı	operasyon süresince:
	yörünge $\leftrightarrow$ proses dinamiği
	girişler $\leq$ giriş limitleri

Roket indirme (SOCP)



minimize girişler	yakıt tüketimi
bağlı	seyir süresince:
	yörünge $\leftrightarrow$ roket dinamiği
	girişler $\leq$ giriş limitleri
	yörünge $\in$ güvenli zarf
	son konum $=$ hedef

Otonom sürüş (QP, NLP)



$$\begin{array}{rl} \underset{\text{girişler}}{\text{maksimize}} & \text{katedilen mesafe} \\ \text{bağlı} & \text{seyir süresince:} \\ & \quad \text{yörünge} \leftrightarrow \text{araç dinamiği} \\ & \quad \text{girişler} \leq \text{giriş limitleri} \\ & \quad \text{yörünge} \in \text{pist} \end{array}$$