Simetrik Matrisler

T.C. Trakya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kontrol Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Işık İlber Sırmatel
sirmatel.github.io

Kaynak (source)

Lecture slides for Introduction to Linear Dynamical Systems

Stephen Boyd

Konu listesi

1. Simetrik matrislerin özvektörleri
2. Karesel formlar
3. Pozitif yarıtanımlı matrisler
4. Spektral norm

Bölüm 1

Simetrik matrislerin özvektörleri

Simetrik matrislerin özdeğerleri

bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin. A simetrik (yani, $A = A^T$) olsun. bu durumda A'nın özdeğerleri gerçeldir.

bunu görmek için, $Av = \lambda v$, $v \neq 0$, $v \in \mathbb{C}^n$ varsayalım. bu durumda

$$\overline{v}^T A v = \overline{v}^T (Av) = \lambda \overline{v}^T v = \lambda \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2$$

ve aynı zamanda

$$\overline{v}^T A v \underbrace{=}_{A=A^T} \overline{v}^T A^T v \underbrace{=}_{A=\overline{A}} \overline{(Av)}^T v = \overline{\lambda v}^T v = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2$$

olur. buradan, $\lambda = \overline{\lambda}$ (yani, $\lambda \in \mathbb{R}$) sonucuna ulaşırız. dolayısıyla, $v \in \mathbb{R}^n$ varsayabiliriz.

Simetrik matrislerin özvektörleri

simetrik bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin. A'nın özvektörlerinden oluşan bir birim dikgen vektör kümesi $\{q_1, q_2, \ldots q_n\}$ mevcuttur.

matris formunda yazarsak:

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$$

koşulunu sağlayan (yani, A'yı köşegenleştiren) bir dikgen Q mevcuttur, dolayısıyla A'yı

$$A = Q\Lambda Q^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T$$

şeklinde ifade edebiliriz. burada q_i hem sol hem de sağ özvektörlerdir.

Bir matrisin özayrışması

$n \times n$ bir A matrisi verilsin. A'nın

$$A = Q\Lambda Q^{-1}$$

şeklindeki ayrıştırmasına **özayrışma** (*eigendecomposition*) denir. burada Q, sütunları A'nın özvektörleri olan $n \times n$ bir matristir (Q'nun i. sütunu A'nın i. özdeğeri q_i), Λ ise köşegen üzerindeki elemanları A'nın özdeğerleri olan bir köşegen matristir (Λ'nın i-i elemanı Λ_{ii} A'nın i. özdeğeri).

Gerçel ve simetrik bir matrisin özayrışması

özel hal olarak, $n \times n$ A gerçel ve simetrik bir matris ise, özdeğerler gerçeldir ve özvektörler gerçel ve birim dikgen bir küme olarak seçilebilir. dolayısıyla simetrik bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin özayrışması

$$A = Q \Lambda Q^T$$

şeklindedir. burada Q'nun sütunları A'nın özvektörleridir ve bunlar gerçel ve birim dikgen bir vektör kümesi oluşturur. Λ köşegen üzerindeki elemanları A'nın özdeğerleri olan bir köşegen matristir.

Gerçel ve simetrik bir matrisin özayrışması

örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

özdeğerler: $\lambda_1 = 1.59 \quad \lambda_2 = 4.41 \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1.59 & 0 \\ 0 & 4.41 \end{bmatrix}$

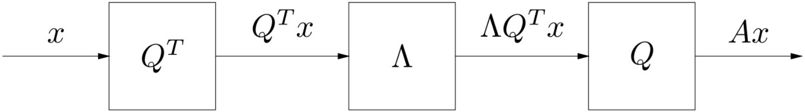
özvektörler (bir seçenek): $v_1 = \begin{bmatrix} -0.92 \\ 0.38 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.92 \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.92 & 0.38 \\ 0.38 & 0.92 \end{bmatrix} \quad Q^T Q = I$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.92 & 0.38 \\ 0.38 & 0.92 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 1.59 & 0 \\ 0 & 4.41 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.92 & 0.38 \\ 0.38 & 0.92 \end{bmatrix}}_{Q^T}$$

Özayrışmanın eşleme adımları ile yorumu

$$A = Q\Lambda Q^T$$



doğrusal eşleme (*mapping*) $y = Ax$

- x'i q_i koordinatlarına göre **çöz** (*resolve*)
- sonucun koordinatlarını λ_i ile **ölçekle** (*scale*)
- sonucu taban q_i ile **yeniden oluştur** (*reconstitute*)

şeklinde adımlarına ayrıştırılabilir

Özayrışmanın geometrik yorumu

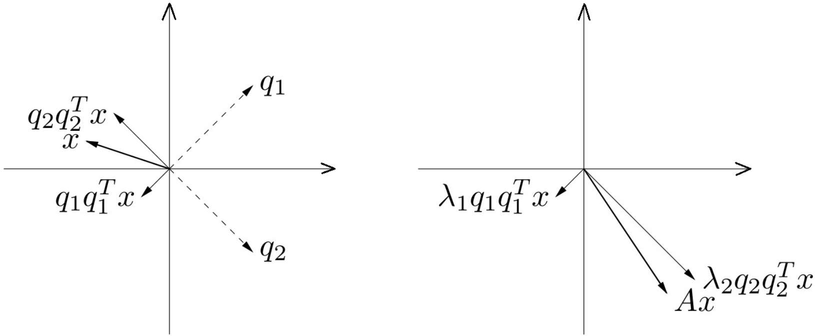
doğrusal eşleme (*mapping*) $y = Ax$, geometrik olarak

- x'i Q^T ile **döndür** (*rotate*)
- sonucu, gerçel sayılar olan Λ'nın köşegen elemanları ile **ölçekle** (*scale*)
- sonucu Q ile geri döndür

şeklindeki adımlarla da yorumlanabilir

Özayrışmanın geometrik yorumu - Örnek

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)^T}_{Q^T}
\end{aligned}
$$



Özayrışma

özvektörlerden oluşan kümenin birim dikgen olmasının kanıtı (özdeğerlerin belirli (*distinct*) olduğu hal için): simetrik A için (özdeğerleri belirli olduğundan) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ şeklinde bir doğrusal bağımsız özvektörler kümesi bulabiliriz:

$$Av_i = \lambda_i v_i, \qquad \|v_i\| = 1$$

buradan

$$v_i^T(Av_j) = \lambda_j v_i^T v_j = (Av_i)^T v_j = \lambda_i v_i^T v_j$$

yazabiliriz. dolayısıyla $(\lambda_i - \lambda_j)v_i^T v_j = 0$ olur. $i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$ geçerlidir (çünkü λ_i belirli). sonuçta $v_i^T v_j = 0$ olur.

- bu durumda (λ_i belirli) "özvektörlerden oluşan bir küme birim dikgendir" diyebiliriz (seçme şansı yok)
- genel durumda (λ_i belirli değil), "özvektörler, birim dikgen bir küme oluşturacak şekilde seçilebilir" dememiz gerekir

Bölüm 2

Karesel formlar

Karesel formlar

bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A_{ij} A'nın ij elemanı)

$$f(x) = x^T Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_ix_j$$

formunda ise, f'e **karesel form** (*quadratic form*) denir

karesel form için A'nın simetrik olduğunu varsayabiliriz, çünkü

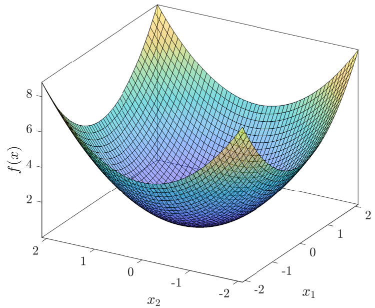
$$x^T Ax = x^T\left(\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)\right)x$$

(A simetrik olmasa da, karesel formu değiştirmeden $x^T Ax$ yerine $x^T\left(\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)\right)x$ yazabiliriz) ($\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ terimi simetriktir ve bu terime A'nın simetrik kısmı denir)

eşsizlik: her $x \in \mathbb{R}^n$ için $x^T Ax = x^T Bx$ ise ve A ile B simetrik ise, $A = B$ olur

Karesel formlar - Örnekler

- $\|Bx\|^2 = x^T B^T B x$
- $\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2$
- $\|Fx\|^2 - \|Gx\|^2 = x^T(F^T F - G^T G)x$ (bütün karesel formlar bu formdadır)
- $$f(x) = x^T A x \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Karesel formla tanımlı kümeler

karesel yüzey (*quadratic surface*):

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = a\} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

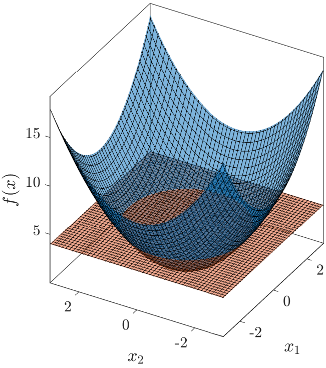
karesel bölge (*quadratic region*):

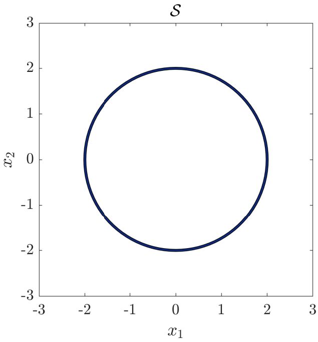
$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq a\} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

Karesel formla tanımlı kümeler - Örnekler

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) = a\}$$

$$f(x) = x^T A x \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad a = 4$$

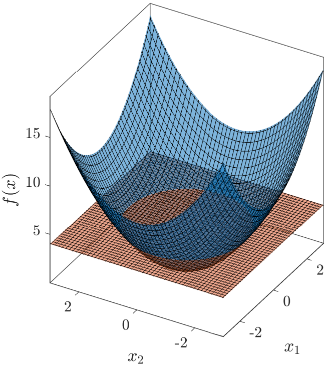


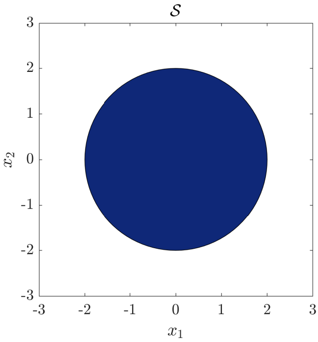


Karesel formla tanımlı kümeler - Örnekler

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \leq a\}$$

$$f(x) = x^T A x \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad a = 4$$

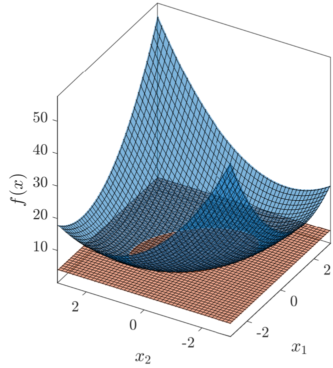


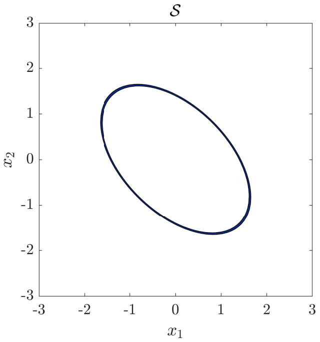


Karesel formla tanımlı kümeler - Örnekler

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) = a\}$$

$$f(x) = x^T A x \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad a = 4$$

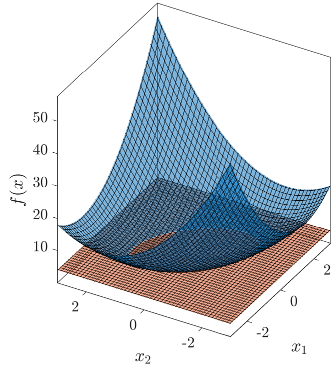


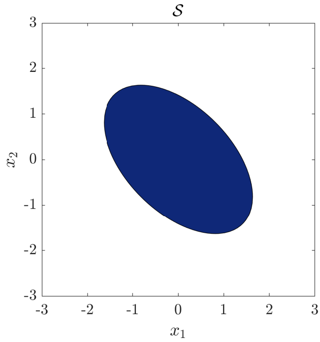


Karesel formla tanımlı kümeler - Örnekler

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq a\}$$

$$f(x) = x^T A x \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad a = 4$$





Karesel formlar için eşitsizlikler

simetrik $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisinin özayrışması $A = Q\Lambda Q^T$ ile verilsin (özdeğerler sıralı şekilde: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$):

$$\begin{aligned} x^T A x &= x^T Q \Lambda Q^T x \\ &= (Q^T x)^T \Lambda (Q^T x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{(q_i^T x)^2}_{\geq 0} \\ &\leq \lambda_1 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (q_i^T x)^2}_{\|Q^T x\|^2 = \|x\|^2} \\ &= \lambda_1 \|x\|^2 \end{aligned}$$

buradan $x^T A x \leq \lambda_1 \|x\|^2$ sonucuna ulaşırız

Karesel formlar için eşitsizlikler

benzer argümanlar ile $x^T Ax \geq \lambda_n \|x\|^2$ olduğunu gösterebiliriz, dolayısıyla

$$\lambda_n \|x\|^2 \leq x^T Ax \leq \lambda_1 \|x\|^2$$

yazabiliriz (yazıyla: karesel form $x^T Ax$, $\lambda_n \|x\|^2$ ile **alttan sınırlıdır** (*bounded from below*), $\lambda_1 \|x\|^2$ ile **üstten sınırlıdır** (*bounded from above*))

(bazen, λ_1'ya $\lambda_{\max}$, λ_n'ya da $\lambda_{\min}$ denir)

burada

$$q_1^T A q_1 = \lambda_1 \|q_1\|^2 = \lambda_1 \qquad q_n^T A q_n = \lambda_n \|q_n\|^2 = \lambda_n$$

geçerlidir, dolayısıyla eşitsizlikler **sıkı**dır (*tight*) (yani, örneğin $x^T Ax \leq \lambda_1 \|x\|^2$ eşitsizliği için, $x = q_1$ seçerek bu eşitsizliğin eşitlik olarak sağlandığı bir durum bulmak mümkündür)

Bölüm 3

Pozitif yarıtanımlı matrisler

Pozitif yarıtanımlı matrisler

simetrik $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi verilsin.

her $x \in \mathbb{R}^n$ için $x^T Ax \geq 0$ ise A'ya **pozitif yarıtanımlı** (*positive semidefinite*) matris denir

- A'nın pozitif yarıtanımlı olması $A \geq 0$ (ve bazen $A \succeq 0$) ile gösterilir
- ancak ve ancak $\lambda_{\min}(A) \geq 0$ ise (yani, A'nın bütün özdeğerleri negatif olmayan ise) A pozitif yarıtanımlıdır
- A'nın pozitif yarıtanımlı olması, her i, j için $A_{ij} \geq 0$ (yani, A'nın bütün elemanlarının negatif olmayan olması) ile aynı değildir
- dikkat: $A \geq 0$ ifadesi bazen "A'nın bütün elemanları negatif olmayan" anlamında kullanılır

Pozitif tanımlı matrisler

simetrik $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin.

her $x \in \mathbb{R}^n$ $(x \neq 0)$ için $x^T A x > 0$ ise A'ya **pozitif tanımlı** (*positive definite*) matris denir

- A'nın pozitif tanımlı olması $A > 0$ (ve bazen $A \succ 0$) ile gösterilir
- ancak ve ancak $\lambda_{\min}(A) > 0$ ise (yani, A'nın bütün özdeğerleri pozitif ise) A pozitif tanımlıdır
- A'nın pozitif tanımlı olması, her i, j için $A_{ij} > 0$ (yani, A'nın bütün elemanlarının pozitif olması) ile aynı değildir

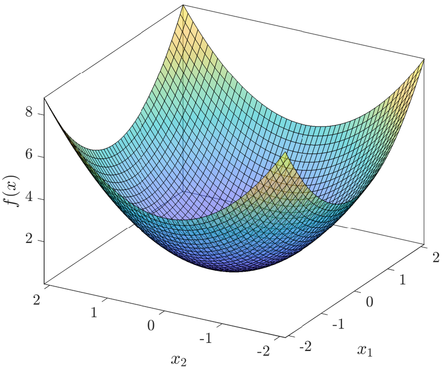
Tanımlı matrisler

- $A \geq 0$ ise A'ya **pozitif yarıtanımlı** (*positive semidefinite*) matris denir
- $A > 0$ ise A'ya **pozitif tanımlı** (*positive definite*) matris denir
- $-A \geq 0$ ise A'ya **negatif yarıtanımlı** (*negative semidefinite*) matris denir
- $-A > 0$ ise A'ya **negatif tanımlı** (*negative definite*) matris denir
- aksi halde (yani, bu dört halden hiçbirine uymuyorsa), A'ya **tanımsız** (*indefinite*) matris denir

Karesel formlar ve tanımlı matrisler

örnek 1: A pozitif tanımlı, $f(x)$ eliptik paraboloit

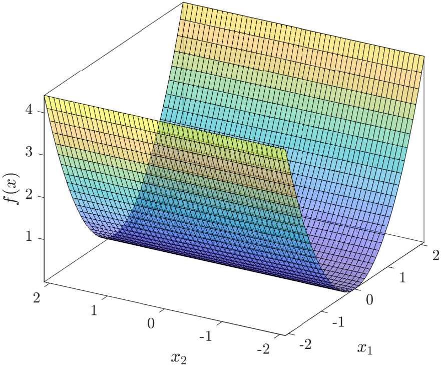
$$f(x) = x^T A x, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$



Karesel formlar ve tanımlı matrisler

örnek 2: A pozitif yarıtanımlı, $f(x)$ parabolik silindir

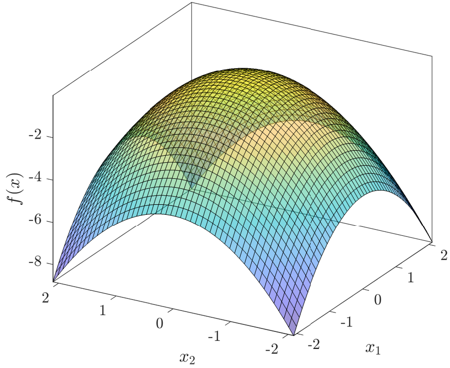
$$f(x) = x^T A x, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0$$



Karesel formlar ve tanımlı matrisler

örnek 3: A negatif tanımlı, $f(x)$ eliptik paraboloit

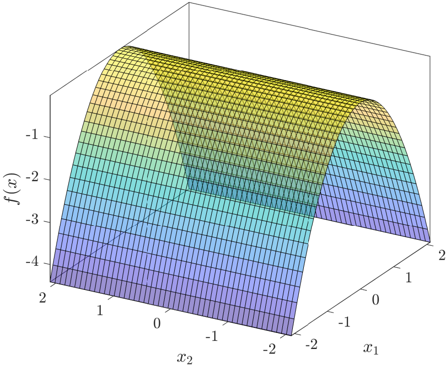
$$f(x) = x^T A x, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$



Karesel formlar ve tanımlı matrisler

örnek 4: A negatif yarıtanımlı, $f(x)$ parabolik silindir

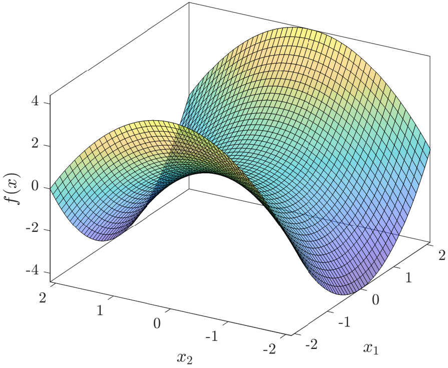
$$f(x) = x^T A x, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0$$



Karesel formlar ve tanımlı matrisler

örnek 5: A tanımsız, $f(x)$ hiperbolik paraboloit

$$f(x) = x^T A x, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$



Matris eşitsizlikleri

simetrik $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisleri verilsin

- $A - B \geq 0$ ise $A \geq B$
- $B - A > 0$ ise $A < B$

ve benzeri eşitsizlikler yazabiliriz. bu formdaki eşitsizliklere **matris eşitsizliği** (*matrix inequality*) denir

örneğin:

- $A \geq 0$, A pozitif yarıtanımlı demektir
- $A > B$, her $x \neq 0$ için $x^T Ax > x^T Bx$ demektir

Matris eşitsizlikleri

matris eşitsizliklerinin özelliklerinden bazıları:

- $A \geq B$ ve $C \geq D$ ise $A + C \geq B + D$
- $B \leq 0$ ise $A + B \leq A$
- $A \geq 0$ ve $\alpha \geq 0$ ise $\alpha A \geq 0$
- $A^2 \geq 0$
- $A > 0$ ise $A^{-1} > 0$

matris eşitsizliği sadece bir **kısmi sıralama**dır (*partial order*) (**tam sıralama** (*total order*) değildir), yani

$$A \not\geq B \qquad B \not\geq A$$

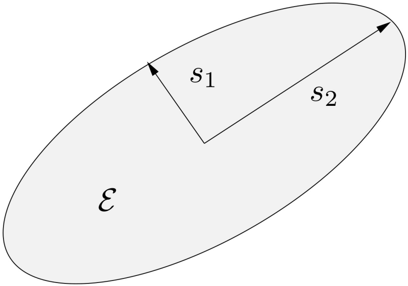
olması mümkündür (bu tarz matrislere **karşılaştırılamaz** (*incomparable*) denir)

Elipsoitler

simetrik pozitif tanımlı A matrisi için

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x^T A x \leq 1\}$$

kümesi, $\mathbb{R}^n$'de ve merkezi 0'da olan bir **elipsoit**tir (*ellipsoid*)
($A = I$ için daire/küre/top)



s_i: **yarıeksen**ler (*semiaxis*) ($\mathbb{R}^2$ için s_1 **küçük yarıeksen** (*minor semiaxis*) ve s_2 **büyük yarıeksen** (*major semiaxis*))

Elipsoitler

yarı büyük eksenler A matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri ile $s_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} q_i$ şeklinde yazılabilir:

- özvektörler (q_i) yarı büyük eksenlerin yönünü belirler
- özdeğerler (λ_i) yarı büyük eksenlerin uzunluğunu belirler

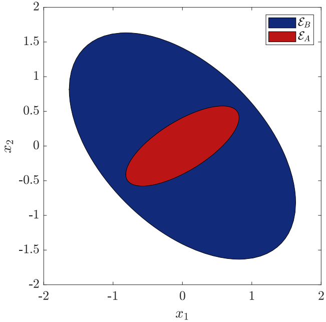
- q_1 yönünde $x^T A x$ büyüktür, dolayısıyla elipsoit bu yönde dardır
- q_n yönünde $x^T A x$ küçüktür, dolayısıyla elipsoit bu yinde geniştir
- $\sqrt{\lambda_{\max}/\lambda_{\min}}$ elipsoitin maksimum **dışmerkezlik** (*eccentricity*) değerini verir

Elipsoitler

$\mathcal{E}_A = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x^T A x \leq 1\}$ ve $\mathcal{E}_B = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x^T B x \leq 1\}$ elipsoitleri verilsin. ancak ve ancak $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_B$ ise $A \geq B$

örnek:

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \qquad A \geq B$$



Bölüm 4

Spektral norm

Bir yönde bir matrisin kazancı

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi verilsin (kare veya simetrik olmayabilir)

$x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

ifadesi A'nın x yönündeki **kazanç** (*gain*) (veya, **büyütme çarpanı** (*amplification factor*)) değerini verir. bu değer x'in **yön**üne (*direction*) göre değişir

burada şu soruları sorabiliriz:

- A'nın maksimum kazancı (ve buna karşılık gelen maksimum kazanç yönü) nedir?
- A'nın minimum kazancı (ve buna karşılık gelen minimum kazanç yönü) nedir?
- A'nın kazancı yöne göre nasıl değişir?

Spektral norm

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi verilsin (kare veya simetrik olmayabilir). A'nın maksimum kazancı $\|A\|$,

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

olarak tanımlıdır. bu değere spektral norm (veya 2-normu ile **doğurulan matris normu** (*induced matrix norm*)) denir.

$$\|A\|^2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} = \max_{x\neq 0} \frac{x^T A^T A x}{\|x\|^2} = \lambda_{\max}(A^T A)$$

geçerlidir, dolayısıyla $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ yazabiliriz

benzer şekilde, A'nın minimum kazancı

$$\min_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sqrt{\lambda_{\min}(A^T A)}$$

ile verilir

Matris normları (ek bilgi)

- Frobenius normu

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2}$$

- 1-normu ile doğurulan matris normu:

$$\|A\|_1 = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m}|A_{ij}|$$

- 2-normu ile doğurulan matris normu (spektral norm):

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$$

- ∞-normu ile doğurulan matris normu:

$$\|A\|_\infty = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

(bu derste sadece 2-normu ve spektral norm ile ilgilendiğimiz için $\|x\|_2$ ve $\|A\|_2$ yerine kısaca $\|x\|$ ve $\|A\|$ yazıyoruz)

Spektral norm

- $A^T A$ bir simetrik pozitif yarıtanımlı matristir, dolayısıyla $\lambda_{\min}(A^T A) \geq 0$ ve $\lambda_{\max}(A^T A) \geq 0$
- A'nın maksimum kazancı $\lambda_{\max}(A^T A)$'ya karşılık gelen maksimum kazanç yönü $x = q_1$ (yani, $A^T A$'nın $\lambda_{\max}(A^T A)$ ile ilişkili özvektörü)
- A'nın minimum kazancı $\lambda_{\min}(A^T A)$'ya karşılık gelen minimum kazanç yönü $x = q_n$ (yani, $A^T A$'nın $\lambda_{\min}(A^T A)$ ile ilişkili özvektörü)

Spektral norm

örnek: $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T A = \begin{bmatrix} 34 & 44 \\ 44 & 35 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0.620 & 0.785 \\ 0.785 & -0.620 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90.7 & 0 \\ 0 & 0.265 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.620 & 0.785 \\ 0.785 & -0.620 \end{bmatrix}^T$$

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{90.7} = 9.53$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0.620 \\ 0.785 \end{bmatrix} \right\| = 1 \qquad \left\| A \begin{bmatrix} 0.620 \\ 0.785 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 2.18 \\ 4.99 \\ 7.78 \end{bmatrix} \right\| = 9.53$$

$$\sqrt{\lambda_{\min}(A^T A)} = \sqrt{0.265} = 0.514$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0.785 \\ -0.620 \end{bmatrix} \right\| = 1 \qquad \left\| A \begin{bmatrix} 0.785 \\ -0.620 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0.46 \\ 0.14 \\ -0.18 \end{bmatrix} \right\| = 0.514$$

bütün $x \neq 0$ için: $0.514 \leq \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 9.53$

Spektral normun özellikleri

- vektör normu ile tutarlılık: $a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ için norm $\|a\| = \sqrt{\lambda_{\max}(a^T a)} = \sqrt{a^T a}$
- her x için, $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$
- ölçekleme: $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\| \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
- üçgen eşitsizliği: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- tanımlılık: ancak ve ancak $\|A\| = 0$ ise $A = 0$
- çarpımın normu: $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$