Matris Tersleri

T.C. Trakya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kontrol Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Işık İlber Sırmatel
sirmatel.github.io

Kaynak (source)

Lecture Slides for Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares.

Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe

Konu listesi

Bölüm 1

Sol matris tersleri

Bir sayının tersi

- $xa = 1$ eşitliğini sağlayan bir x sayısına a'nın tersi (*inverse*) denir (burada x ve a skaler)
- ters (yani, $1/a$) ancak ve ancak $a \neq 0$ ise mevcuttur, ve eşsizdir (*unique*)
- örnek 1: $x\,5 = 1 \longrightarrow a$'nın tersi: $x = 0.2$ ($x = 0.2$ sayısından başka a'nın tersi olan sayı yok, dolayısıyla a'nın tersi $x = 0.2$ eşsiz)
- örnek 2: $x\,0 = 1 \longrightarrow a = 0$, a'nın tersi mevcut değil (*does not exist*)

Sol tersler

- $XA = I$ eşitliğini sağlayan bir X matrisine A'nın sol tersi (*left inverse*) denir
- bir A matrisinin sol tersi mevcutsa A matrisine sol tersi alınabilir (*left-invertible*) denir
- örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin iki farklı sol tersi mevcuttur:

$$B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -11 & -10 & 16 \\ 7 & 8 & -11 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Sol ters ve sütun bağımsızlığı

- A'nın bir sol tersi C mevcutsa A'nın sütunları doğrusal bağımsızdır
- böyle olduğunu görmek için:
  $Ax = 0$ ve $CA = I$ ise

  $$0 = C0 = C(Ax) = (CA)x = Ix = x$$

  (hatırlatma: $x = 0$ $Ax = 0$'ı gerektiriyorsa A'nın sütunları doğrusal bağımsızdır)

Sol ters ve sütun bağımsızlığı

- bu ifadenin karşıtının da (yani, "A'nın sütunları doğrusal bağımsızsa A'nın bir sol tersi C mevcuttur" ifadesinin de) doğru olduğunu daha sonra göreceğiz, dolayısıyla:

bir matris, ancak ve ancak sütunları doğrusal bağımsız ise sol tersi alınabilir matristir

- bu, aşağıdaki ifadenin matrisler için genelleştirilmiş halidir:

bir sayı, ancak ve ancak sıfırdan farklı ise tersi alınabilir sayıdır

- sol tersi alınabilir matrisler uzun matris veya kare matristir (not: geniş matrislerde satırdan çok sütun vardır, dolayısıyla sütunlar kendiliğinden doğrusal bağımlıdır)

Not: Geniş matrisler ve doğrusal bağımlılık

örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

A'nın sütunları:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bu sütunlar $\mathbb{R}^2$'de tanımlı (yani, iki boyutlu) üç adet vektördür. iki boyutlu bir vektör kümesi ancak iki elemanlı ise doğrusal bağımsız olabilir.

genel olarak, bir geniş matrisin sütunlarının doğrusal bağımsız olması imkansızdır

Sol ters ile doğrusal denklemlerin çözümü

- $Ax = b$ ifadesini ele alalım. A'nın sol tersi C mevcut olsun
- buradan $Cb = C(Ax) = (CA)x = Ix = x$ yazabiliriz
- dolayısıyla, $Ax = b$ ifadesinin sağ el tarafını (yani, b'yi) A'nın bir sol tersi ile çarpmak $Ax = b$ denkleminin çözümü x'i verir

Sol ters ile doğrusal denklemlerin çözümü

örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- aşırı-belirli denklem takımı $Ax = b$'nin (eşsiz) çözümü:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- A matrisinin iki farklı sol tersi mevcuttur:

$$B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -11 & -10 & 16 \\ 7 & 8 & -11 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

- sağ el tarafını sol ters B ve C ile (ayrı ayrı) çarparsak:

$$Bb = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad Cb = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Bölüm 2

Sağ matris tersleri

Sağ tersler

- $AX = I$ eşitliğini sağlayan bir X matrisine A'nın sağ tersi (*right inverse*) denir
- bir A matrisinin sağ tersi mevcutsa A matrisine sağ tersi alınabilir (*right-invertible*) denir
- ancak ve ancak A^T sol tersi alınabilir ise A sağ tersi alınabilirdir:

$$AX = I \;\Leftrightarrow\; (AX)^T = I \;\Leftrightarrow\; X^T A^T = I$$

Sağ tersler

- dolayısıyla şu sonuca varabiliriz:

  bir matris, ancak ve ancak satırları doğrusal bağımsız ise sağ tersi alınabilir matristir

- sağ tersi alınabilir matrisler geniş matris veya kare matristir (not: uzun matrislerde sütundan çok satır vardır, dolayısıyla satırlar kendiliğinden doğrusal bağımlıdır)

Not: Uzun matrisler ve doğrusal bağımlılık

örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A'nın satırları:

$$a_1^T = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad a_2^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad a_3^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bu satırlar $\mathbb{R}^2$'de tanımlı (yani, iki boyutlu) üç adet vektördür. iki boyutlu bir vektör kümesi ancak iki elemanlı ise doğrusal bağımsız olabilir.

genel olarak, bir uzun matrisin satırlarının doğrusal bağımsız olması imkansızdır

Sağ ters ile doğrusal denklemlerin çözümü

- $Ax = b$ ifadesini ele alalım. A'nın sağ tersi B mevcut olsun
- buradan $Ax = A(Bb) = (AB)b = Ib = b$ yazabiliriz
- dolayısıyla, $Ax = b$ ifadesinin sağ el tarafını (yani, b'yi) A'nın bir sağ tersi ile çarpmak $Ax = b$ denkleminin çözümü x'i verir

Sağ ters ile doğrusal denklemlerin çözümü

örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- A matrisinin iki sağ tersi şu şekildedir:

$$B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -11 & 7 \\ -10 & 8 \\ 16 & -11 \end{bmatrix}, \qquad C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

- eksik-belirli denklem takımı $Ax = b$'nin (çeşitli) çözümleri mevcuttur:

$$Bb = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \qquad Cb = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(buradaki $Ax = b$'nin başka birçok çözümü vardır)

Bölüm 3

Matris tersi

Matris tersi

- A matrisinin sol ve sağ tersi mevcutsa, bunlar eşsizdir ve eşittir. bu durumda A matrisine tersi alınabilir (*invertible*) denir
- tersi alınabilir bir A matrisi kare matris olmak zorundadır
- böyle olduğunu görmek için: $AX = I$ ve $YA = I$ ise

$$X = IX = (YA)X = Y(AX) = YI = Y$$

- A matrisinin tersi A^{-1} ile gösterilir:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

- tersin tersi: $(A^{-1})^{-1} = A$

Kare doğrusal denklem takımının çözümü

- A'nın tersi alınabilir olduğunu varsayalım
- her b için $Ax = b$'nin eşsiz çözümü mevcuttur:

$$x = A^{-1}b$$

- bu, skaler denklem $ax = b$'nin $x = (1/a)b$ ($a \neq 0$ için) şeklinde çözümü olmasının genelleştirilmiş halidir
- basit görünen $x = A^{-1}b$ ifadesi birçok uygulamaya temel oluşturur

Tersi alınabilir matrisler

bir kare matris A için aşağıdaki koşullar denktir:

- A'nın tersi alınabilir
- A'nın sütunları doğrusal bağımsız
- A'nın satırları doğrusal bağımsız
- A'nın sol tersi mevcut
- A'nın sağ tersi mevcut

bu koşullardan herhangi biri sağlanıyorsa, diğer hepsi sağlanır

Matris tersi - Örnekler

- $I^{-1} = I$
- Q dikgen matris (yani, $Q^T Q = I$'yı sağlayan kare matris) ise $Q^{-1} = Q^T$
- not: dikgen (*orthogonal*) matrise birim dikgen (*orthonormal*) matris de denir

Matris tersi - Örnekler

- 2×2 matris A ancak ve ancak $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$ ise tersi alınabilirdir

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}$$

  - bu formülü bilmeniz **gerekiyor**
  - daha büyük matrisler için buna benzer ancak çok daha karmaşık formüller mevcuttur (bunları bilmeniz gerekmiyor)
- not: 2×2 matris A için, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ terimine A'nın determinantı denir. genel olarak bir kare matris A'nın determinantı $\det(A)$ ile gösterilir. determinant konusunu daha sonra inceleyeceğiz

Matris tersi - 3×3 matris örneği

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

- A tersi alınabilir matristir, tersi şu şekildedir:

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 0 & -20 & -10 \\ -6 & 5 & -2 \\ 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

- $AA^{-1} = I$ (veya $A^{-1}A = I$) ifadeleriyle sınanabilir
- matris tersinin hesaplanmasını daha sonra inceleyeceğiz

Matris tersinin özellikleri

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (tersler mevcutsa)
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (bu bazen A^{-T} ile gösterilir)
- negatif matris üsleri: $(A^{-1})^k$, A^{-k} ile gösterilir
- $A^0 = I$ ile, eşitlik $A^kA^l = A^{k+l}$ bütün k ve l tamsayıları için sağlanır

Üçgen matrisler

- köşegen elemanları sıfır olmayan alt üçgen matris L tersi alınabilirdir
- böyle olduğunu görmek için, $Lx = 0$'ı şu şekilde yazalım:

$$\begin{aligned}
L_{11}x_1 \quad &= 0 \\
L_{21}x_1 + L_{22}x_2 \quad &= 0 \\
&\vdots \\
L_{n1}x_1 + L_{n2}x_2 + \cdots + L_{n,n-1}x_{n-1} + L_{nn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

  - birinci denklemden: $x_1 = 0$ ($L_{11} \neq 0$'dan dolayı)
  - ikinci denklem $L_{22}x_2 = 0$ olarak basitleşir, dolayısıyla $x_2 = 0$ ($L_{22} \neq 0$'dan dolayı)
  - işlemin devamı buna benzer şekilde yapılır

  bu, L'nin sütunlarının doğrusal bağımsız olduğunu gösterir, dolayısıyla L tersi alınabilirdir
- benzer şekilde: köşegen elemanları sıfır olmayan üst üçgen matris R tersi alınabilirdir

QR ayrıştırmasıyla matris tersi hesabı

- A'nın kare ve tersi alınabilir olduğunu varsayalım
- $\Rightarrow$ sütunları doğrusal bağımsızdır
- $\Rightarrow$ Gram-Schmidt algoritmasıyla şu şekilde bir QR ayrıştırması elde edilir:
  - $A = QR$
  - Q dikgen matris: $Q^T Q = I$
  - R köşegen elemanları pozitif olan üst üçgen matris, dolayısıyla tersi alınabilir
- $\Rightarrow$ şu ifadeleri elde ederiz:

$$A^{-1} = (QR)^{-1} = R^{-1} Q^{-1} = R^{-1} Q^T$$

- sonuç olarak A^{-1}'yı $R^{-1} Q^T$ olarak hesapladık (R^{-1}'nin hesaplanmasına daha sonra bakacağız)

Bölüm 4

Doğrusal denklemlerin çözümü

Geri yönde yerine koyma

- R köşegen elemanları sıfır olmayan üst üçgen matris olsun (not: bu şekildeki bir matris tersi alınabilirdir)
- $Rx = b$'yi şu şekilde yazalım:

$$\begin{aligned} R_{11}x_1 + R_{12}x_2 + \cdots + R_{1,n-1}x_{n-1} + R_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ R_{n-1,n-1}x_{n-1} + R_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\ R_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

- son denklemden $x_n = b_n / R_{nn}$ elde edilir
- sondan bir önceki denklemden

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - R_{n-1,n}x_n}{R_{n-1,n-1}}$$

  elde edilir
- işlemin devamı buna benzer şekilde yapılarak $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_1$ elde edilir

Geri yönde yerine koyma

- denklem takımının bilinmeyenlerini ters yönde (x_n'den x_1'e doğru) bulduğumuz ve bulunan x_i değerlerini denklemde yerine koyduğumuz için bu yönteme geri yönde yerine koyma (*back substitution*) denir
- bu yöntem ile $x = R^{-1}b$ hesaplanır
- karmaşıklık:
  - birinci adımın maliyeti: 1 flop (bölme)
  - ikinci adımın maliyeti: 3 flop
  - i. adımın maliyeti: $2i - 1$ flop

  toplam maliyet: $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ flop

QR ayrıştırmasıyla denklem çözümü

- A'nın tersi alınabilir olduğunu varsayalım
- $Ax = b$ denklemini çözelim (yani, $x = A^{-1}b$'yi hesaplayalım)
- QR ayrıştırması $A = QR$ ile şunu elde ederiz:

$$A^{-1} = (QR)^{-1} = R^{-1}Q^T$$

- buradan geri yönde yerine koyma ile $x = R^{-1}(Q^T b)$ hesaplanır

QR ayrıştırmasıyla denklem çözümü

problem verisi: tersi alınabilir $n \times n$ matris A, n-vektör b

algoritma:

> **verilenler:** doğrusal denklem takımı $Ax = b$
>
> **adımlar:**
>
> 1) QR ayrıştırması $A = QR$'yi hesapla ($2n^3$ flop)
> 2) $Q^T b$'yi hesapla ($2n^2$ flop)
> 3) Geri yönde yerine koyma kullanarak
>   üçgen denklem $Rx = Q^T b$'yi çöz (n^2 flop)

karmaşıklık:

- toplam maliyet: $2n^3 + 3n^2 \approx 2n^3$ (büyük n için)

Çoklu sağ el tarafları

- tersi alınabilir A için $Ax_i = b_i$'yi ($i = 1, \ldots, k$) çözelim
- bunun için önce bir defa QR ayrıştırması yapılır (maliyet $2n^3$ flop)
- sonra $i = 1, \ldots, k$ için geri yönde yerine koyma ile $Rx_i = Q^T b_i$ çözülür (maliyet $3kn^2$ flop)
- toplam maliyet: $2n^3 + 3kn^2$ flop
- k n'ye göre küçükse, maliyet bir adet denklem takımının maliyetiyle aynıdır

Bölüm 5

Matris ayrıştırmaları (ek bilgi)

Matris ayrıştırmaları

matris ayrıştırması (*factorization* veya *decomposition*) ile bir matris bir grup matrisin çarpımı olarak çarpanlarına ayrılır. farklı problem sınıfları için kullanılan, değişik özelliklerde birçok matris ayrıştırması mevcuttur.

sık kullanılan bazı matris ayrıştırmaları:

- QR ayrıştırması: $A = QR$ (Q dikgen matris, R köşegen elemanları pozitif olan üst üçgen matris)
- LU ayrıştırması: $A = PLU$ (P devşirim matrisi, L alt üçgen matris, U üst üçgen matris)
- Cholesky ayrıştırması: $A = LL^T$ (L köşegen elemanları pozitif olan alt üçgen matris)

LU ayrıştırmasıyla denklem çözümü

algoritma:

verilenler: doğrusal denklem takımı $Ax = b$
(A tersi alınabilir $n \times n$ matris, b n-vektör)

adımlar:

1) LU ayrıştırması $A = PLU$'yu hesapla ($(2/3)n^3$ flop)
2) $Pz_1 = b$'yi çöz (0 flop)
3) $Lz_2 = z_1$'yi çöz (n^2 flop)
4) $Ux = z_2$'yi çöz (n^2 flop)

karmaşıklık:

- toplam maliyet: $(2/3)n^3 + 2n^2 \approx (2/3)n^3$ (büyük n için)

Cholesky ayrıştırmasıyla denklem çözümü

algoritma:

verilenler: doğrusal denklem takımı $Ax = b$

(A pozitif tanımlı $n \times n$ matris, b n-vektör)

adımlar:

1) Cholesky ayrıştırması $A = LL^T$'yi hesapla ($(1/3)n^3$ flop)
2) $Lz_1 = b$'yi çöz (n^2 flop)
3) $L^T x = z_1$'yi çöz (n^2 flop)

karmaşıklık:

- toplam maliyet: $(1/3)n^3 + 2n^2 \approx (1/3)n^3$ (büyük n için)

Bölüm 6

Sözde ters

Gram matrisinin tersi alınabilirliği

- (tersi alınabilirlik: *invertibility*)
- Gram matrisi: $G = A^T A$
- ancak ve ancak $A^T A$ tersi alınabilir ise A'nın sütunları doğrusal bağımsızdır
- böyle olduğunu görmek için, $Ax = 0 \Leftrightarrow A^T Ax = 0$ olduğunu göstereceğiz
- $\Rightarrow$: $Ax = 0$ ise $(A^T A)x = A^T(Ax) = A^T 0 = 0$
- $\Leftarrow$: $(A^T A)x = 0$ ise

$$0 = x^T(A^T A)x = (Ax)^T(Ax) = \|Ax\|^2 = 0$$

dolayısıyla $Ax = 0$

Uzun matrisin sözde tersi

- A sütunları doğrusal bağımsız bir uzun matris ise $A^T A$ tersi alınabilirdir
- bu şekildeki bir A matrisinin sözde tersi (*pseudo-inverse*) $A^\dagger$ ile gösterilir ve

  $$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$$

  olarak tanımlıdır
- $A^\dagger$, A'nın bir sol tersidir:

  $$A^\dagger A = (A^T A)^{-1} A^T A = (A^T A)^{-1} (A^T A) = I$$

  (bunun A'nın çok önemli bir sol tersi olduğunu daha sonra göreceğiz)
- $A^\dagger$, A kare matris ise A^{-1} olarak basitleşir:

  $$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T = A^{-1} A^{-T} A^T = A^{-1} I = A^{-1}$$

- not: sözde terse "Moore-Penrose tersi" de denir

Geniş matrisin sözde tersi

- A satırları doğrusal bağımsız bir geniş matris ise AA^T tersi alınabilirdir
- bu şekildeki bir A matrisinin sözde tersi $A^\dagger$ ile gösterilir ve

$$A^\dagger = A^T(AA^T)^{-1}$$

  olarak tanımlıdır
- $A^\dagger$, A'nın bir sağ tersidir:

$$AA^\dagger = AA^T(AA^T)^{-1} = I$$

  (bunun A'nın çok önemli bir sağ tersi olduğunu daha sonra göreceğiz)
- $A^\dagger$, A kare matris ise A^{-1} olarak basitleşir:

$$A^\dagger = A^T(AA^T)^{-1} = A^TA^{-T}A^{-1} = A^{-1}$$

QR ayrıştırmasıyla sözde ters

- A'nın sütunları doğrusal bağımsız olsun
- QR ayrıştırması: $A = QR$
- (not: $Q^T Q = I$; R üst üçgen, köşegen elemanları pozitif, tersi alınabilir)
- buradan $A^T A = (QR)^T (QR) = R^T \underbrace{Q^T Q}_{I} R = R^T R$

  yazılabilir
- dolayısıyla

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} = (R^T R)^{-1} (QR)^T = R^{-1} \underbrace{R^{-T} R^T}_{I} Q^T = R^{-1} Q^T$$

  yazılabilir
- $A^\dagger$, Q^T'nin sütunları üzerinde geri yönde yerine koyma kullanılarak hesaplanabilir
- satırları doğrusal bağımsız A için $A^\dagger = Q R^{-T}$