Matris Örnekleri

T.C. Trakya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kontrol Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Işık İlber Sırmatel
sirmatel.github.io

Kaynak (source)

Lecture Slides for Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares.
Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe

Konu listesi

1. Geometrik dönüşümler
2. Seçiciler
3. Çakışım matrisi
4. Evrişim

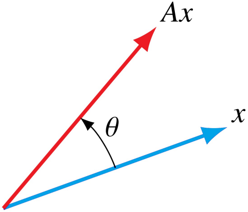
Bölüm 1

Geometrik dönüşümler

Geometrik dönüşümler

- birçok geometrik dönüşüm ve 2-3 boyutlu vektörlerin fonksiyonları matris çarpımı $y = Ax$ ile ifade edilebilir
- örnek: 2 boyutta θ açısı kadar dönme (*rotation*)

$$y = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} x$$



(matrisin elemanlarını bulmak için Ae_1 ve Ae_2'yi inceleyin)

Bölüm 2

Seçiciler

Seçiciler

- bir $m \times n$ seçici (*selector*) matrisi: her satır bir (devrik) birim vektör
$$A = \begin{bmatrix} e_{k_1}^T \\ \vdots \\ e_{k_m}^T \end{bmatrix}$$
- A ile çarpım x'in elemanlarını seçer:
$$Ax = \begin{bmatrix} x_{k_1} \\ \vdots \\ x_{k_m} \end{bmatrix}$$

Seçiciler

- örnek: $m \times 2m$ matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  2 ile örnek seyreltme (*down-sampling*) yapar: $2m$-vektör x için

$$y = Ax = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{2m-1} \end{bmatrix}$$

- diğer örnekler: görüntü kırpma (*image cropping*), devşirim (*permutation*)

Bölüm 3

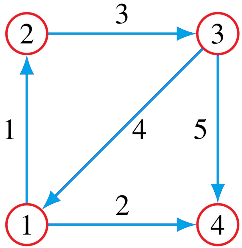
Çakışım matrisi

Çakışım matrisi

- n adet düğüm (*vertex* veya *node*) ve m adet ayrıt (*edge* veya *link*) içeren bir çizge ele alalım
- bu çizgenin çakışım (*incidence*) matrisi, elemanları

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ayrıt } j \text{ düğüm } i\text{'ye yöneliyorsa} \\ -1 & \text{ayrıt } j \text{ düğüm } i\text{'den ayrılıyorsa} \\ 0 & \textit{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $n \times m$ matristir
- $n = 4$ ve $m = 5$ ile bir örnek:



$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Akış korunumu

- m-vektör x (bir büyüklüğün) ayrıtlar boyunca akışını verir (bu durumda, çizgeye ağ (*network*) de denir)
- örnekler: ısı, para, güç, kütle, insan, araç . . .
- $x_j > 0$ akışın ayrıt yönünü izlediği anlamına gelir
- A çizge/ağ çakışım matrisi
- Ax toplam (veya net) akışları veren n-vektördür
- $(Ax)_i$ düğüm i'ye olan net akış
- $Ax = 0$ denklemine akış korunumu (*flow conservation*) denir; $Ax = 0$'i sağlayan x'e dolaşım (*circulation*) denir

Potansiyeller ve Dirichlet enerjisi

- n-vektör ν'ye potansiyel diyelim
- ν_i düğüm i'deki potansiyel değeri
- m-vektör $u = A^T\nu$, ayrıtların (m adet ayrıt) aralarındaki potansiyel farklarının vektörüdür
- $u_j = \nu_l - \nu_k$ (ayrıt j düğüm k'den düğüm l'ye gider)
- Dirichlet enerjisi $\mathcal{D}(\nu) = \|A^T\nu\|^2$

  $$\mathcal{D}(\nu) = \sum_{\text{ayrıtlar } (k,l)} (\nu_l - \nu_k)^2$$

  (ayrıtların aralarındaki potansiyel farklarının karelerinin toplamı)
- komşu (*neighboring*) düğümlerin potansiyel değerleri benzer ise $\mathcal{D}(\nu)$ küçüktür

Bölüm 4

Evrişim

Evrişim

- n-vektör a ve m-vektör b için evrişim (*convolution*) $c = a * b$, elemanları

$$c_k = \sum_{i+j=k+1} a_i b_j, \quad k = 1, 2, \ldots, n+m-1$$

olarak tanımlanan $(n+m-1)$-vektördür

Evrişim

- örneğin, $n = 4$ ve $m = 3$ için:

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1 b_1 \\
c_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_1 \\
c_3 &= a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 \\
c_4 &= a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1 \\
c_5 &= a_3 b_3 + a_4 b_2 \\
c_6 &= a_4 b_3
\end{aligned}$$

- örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Polinomsal çarpım

- a ve b iki polinomun katsayı vektörleri olsun:

$$p(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}, \quad q(x) = b_1 + b_2 x + \cdots + b_m x^{m-1}$$

- evrişim $c = a * b$, çarpım $p(x)q(x)$'nun katsayılarını verir

$$p(x)q(x) = c_1 + c_2 x + \cdots + c_{n+m-1} x^{n+m-2}$$

- buradan evrişimin birçok özelliğinin basit kanıtları elde edilebilir; örneğin:

$$a * b = b * a$$
$$(a * b) * c = a * (b * c)$$
$$\text{ancak } a = 0 \text{ veya } b = 0 \text{ ise } a * b = 0$$

Toeplitz matrisleri

- $c = a * b$, $c = T(b)a$ şeklindeki matris-vektör çarpımıyla ifade edilebilir; burada $T(b)$

$$T(b) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

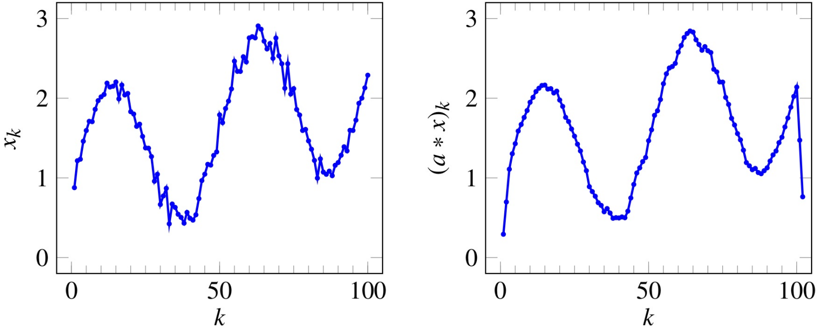
  şeklinde tanımlıdır
- $T(b)$ bir Toeplitz matrisidir (Toeplitz matrislerinde soldan sağa alçalan köşegenler üzerindeki elemanlar eşittir)

Zaman serilerinin hareketli ortalaması

- n-vektör x bir zaman serisini temsil eder
- evrişim $y = a * x$ ($a = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T$ ile) 3-periyotluk hareketli ortalamadır:

$$y_k = \frac{1}{3}\left(x_k + x_{k-1} + x_{k-2}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n+2$$

($k < 1$ ve $k > n$ için x_k 0 olarak yorumlanır)



Giriș-çıkış evrișim sistemi

- m-vektör u bir zaman serisi girişi temsil eder
- $(m+n-1)$-vektör y bir zaman serisi çıkışı temsil eder
- $y = h * u$ bir evrişim modelidir
- n-vektör h sistem dürtü tepkisidir (*impulse response*)
- $$y_i = \sum_{j=1}^{n} u_{i-j+1} h_j$$

  ($k < n$ ve $k > n$ için u_k 0 olarak yorumlanır)
- yorum: y_i (i anındaki çıkış) u_i, u_{i-1}, u_{i-n+1} değerlerinin doğrusal bileşimidir
- h_3 şu anki çıkışın 2 zaman adımı önceki girişe ne şekilde bağlı olduğunu veren çarpandır