Erim ve Sıfır Uzayı

T.C. Trakya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kontrol Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Işık İlber Sırmatel
sirmatel.github.io

Kaynak (source)

Lecture slides for Introduction to Linear Dynamical Systems

Stephen Boyd

Konu listesi

1. Küme oluşturucu notasyonu
2. Vektör uzayları ve altuzaylar
3. Sıfır uzayı
4. Erim
5. Kerte
6. Dikgenlik
7. Doğrusal denklemlerin çözümü
8. Örnekler

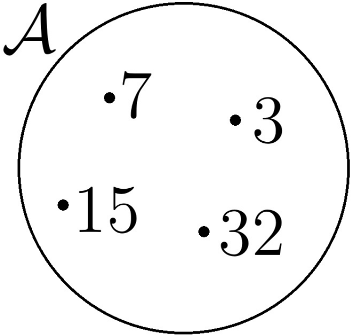
Bölüm 1

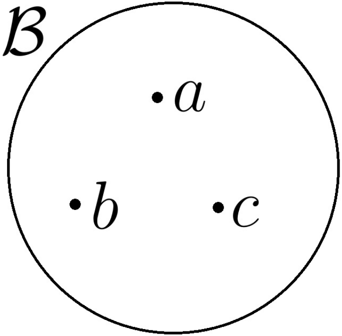
Küme oluşturucu notasyonu

Küme oluşturucu notasyonu

kümeler bütün elemanları belirtilerek tanımlanabilir. örnekler:

- $\mathcal{A} = \{7, 3, 15, 32\}$: 3, 7, 15 ve 32 sayılarını içeren (ve başka hiçbir şey içermeyen) küme
- $\mathcal{B} = \{a, b, c\}$: a, b ve c'yi içeren (ve başka hiçbir şey içermeyen) küme





Küme oluşturucu notasyonu

kümeler, elemanlarının sağladığı koşullar belirtilerek de tanımlanabilir. bunun için kullanılan notasyona "küme oluşturucu notasyonu" (*set-builder notation*) denir.

$$\mathcal{S} = \{x \mid \Phi(x)\}$$

- $\mathcal{S}$: kümenin adı (farklı adlar verilebilir)
- x: kümenin elemanları (farklı adlar verilebilir)
- $\Phi(x)$: yüklem (*predicate*) (elemanların sağladığı koşullar)
- kümenin elemanlarının dahil olduğu bir üstküme (*superset*) de belirtilebilir, örneğin: $x \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x)\}$. bu durumda, $\mathcal{S}$ kümesinin bu üstkümenin altkümesi (*subset*) olduğu anlaşılır. bu durum $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ ("$\mathcal{S}$, $\mathbb{R}^n$'nin altkümesi") ile gösterilir

Küme oluşturucu notasyonu

örnekler:

- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$: kesin pozitif reel sayıların kümesi
- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| = 1\}$: mutlak değeri 1'e eşit olan reel sayıların kümesi (yani, $\{-1, 1\}$)
- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 2$ veya $x > 3\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \geq 3\}$: 3'ten küçük olmayan tamsayıların kümesi

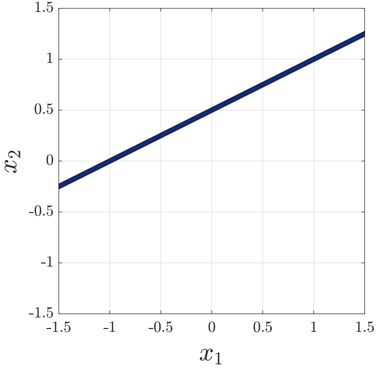
(not: $\mathbb{R}$ reel sayılar, $\mathbb{Z}$ tamsayılar, $\mathbb{N}$ doğal sayılar, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar, $\mathbb{I}$ sanal sayılar, $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar)

Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Doğru ($\mathbb{R}^2$)

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 = 0.5x_1 + 0.5\}$$

yazıyla: $x_2 = 0.5x_1 + 0.5$ doğrusunun üzerindeki noktalardan oluşan küme

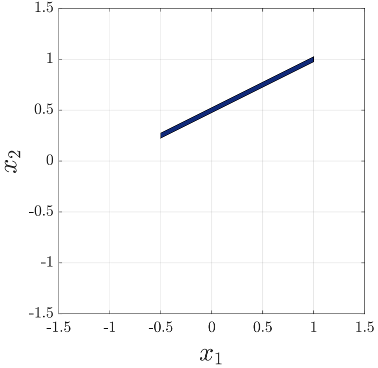


Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Doğru parçası ($\mathbb{R}^2$)

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \dots \\ x_2 = 0.5x_1 + 0.5, \, \dots \\ -0.5 \leq x_1 \leq 1\}$$

yazıyla: $x_2 = 0.5x_1 + 0.5$ doğrusunun üzerindeki noktalardan $-0.5 \leq x_1 \leq 1$ koşulunu sağlayanlardan oluşan küme

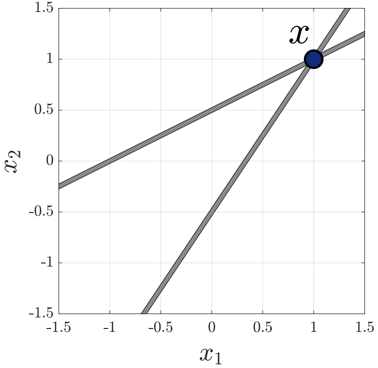


Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

İki doğrunun kesişimi ($\mathbb{R}^2$)

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ldots \\ x_2 = 0.5x_1 + 0.5, \ \ldots \\ x_2 = 1.5x_1 + 0.5\}$$

yazıyla: $x_2 = 0.5x_1 + 0.5$ ve $x_2 = 1.5x_1 + 0.5$ doğrularının üzerindeki noktalardan oluşan küme (bu kümenin bir elemanı vardır: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)



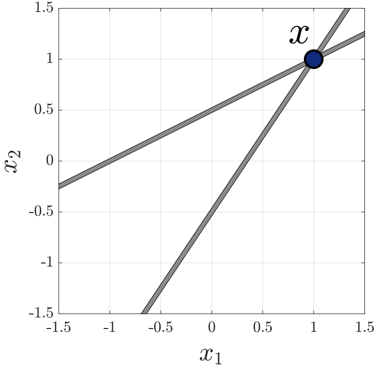
Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

İki doğrunun kesişimi ($\mathbb{R}^2$)

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, Ax = b\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1.5 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

yazıyla: $Ax = b$ denkleminin çözümü olan noktalardan oluşan küme (bu kümenin bir elemanı vardır: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)



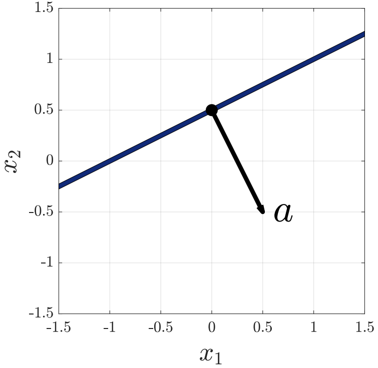
Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Hiperdüzlem (*hyperplane*) ($\mathbb{R}^2$)

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, a^T x = b\}$$

$$a = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad b = -0.5$$

yazıyla: a'ya dik noktalardan oluşan (orijinden kayma b ile) küme

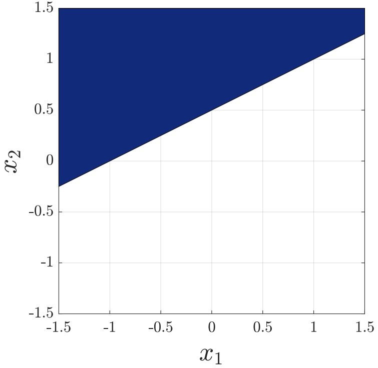


Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Yarıuzay (*halfspace*) ($\mathbb{R}^2$)

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 \geq 0.5x_1 + 0.5\}$$

yazıyla: $x_2 \geq 0.5x_1 + 0.5$ koşulunu sağlayan noktalardan oluşan küme



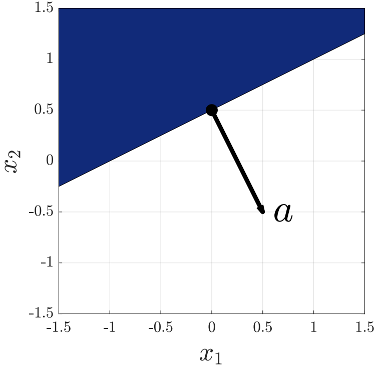
Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Yarıuzay (*halfspace*) ($\mathbb{R}^2$)

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, a^T x \leq b\}$$

$$a = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad b = -0.5$$

yazıyla: $a^T x \leq b$ koşulunu sağlayan (veya, kayma b ile, a ile geniş açı yapan) noktalardan oluşan küme



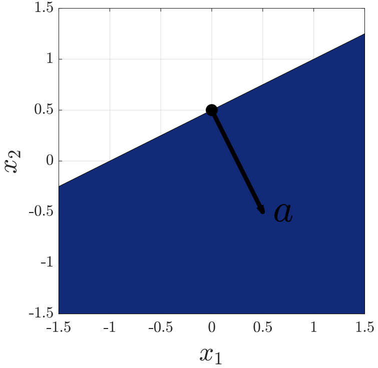
Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Yarıuzay (*halfspace*) ($\mathbb{R}^2$)

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, a^T x \geq b\}$$

$$a = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad b = -0.5$$

yazıyla: $a^T x \geq b$ koşulunu sağlayan (veya, kayma b ile, a ile dar açı yapan) noktalardan oluşan küme

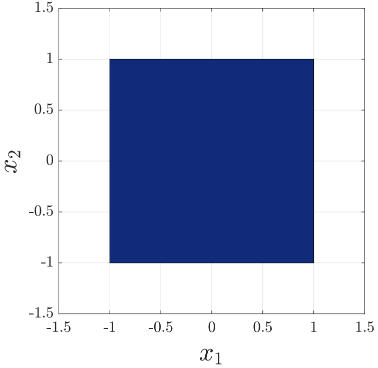


Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Kare ($\mathbb{R}^2$)

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, Ax \leq b\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



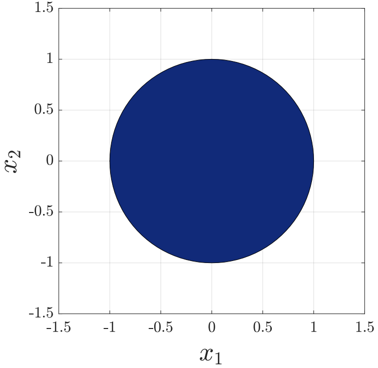
Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Daire ($\mathbb{R}^2$)

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|x\| \leq 1\}$$

veya

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^T x \leq 1\}$$

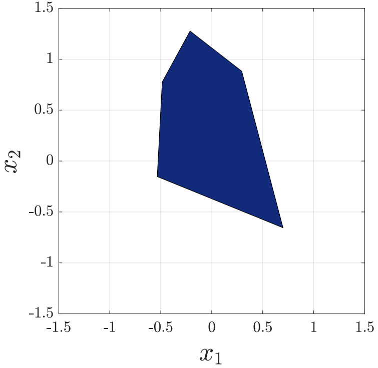


Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Çokgen (*polygon*) ($\mathbb{R}^2$)

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax \leq b\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.9 & 0.5 \\ -1.1 & -2.7 \\ -1.1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.9 \\ -1.9 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

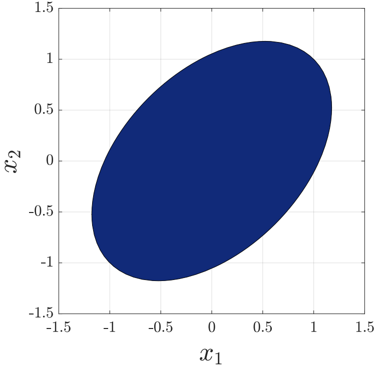


Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Elips (*ellipse*) ($\mathbb{R}^2$)

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^T P x \leq 2\}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.8 & -0.8 \\ -0.8 & 1.8 \end{bmatrix}$$



Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

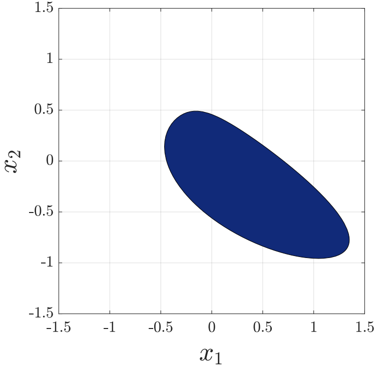
Spektrahedron ($\mathbb{R}^2$)

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 A_1 + x_2 A_2 \leq B\}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

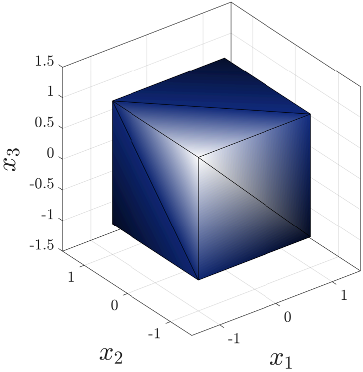


Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Küp ($\mathbb{R}^3$)

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, Ax \leq b\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



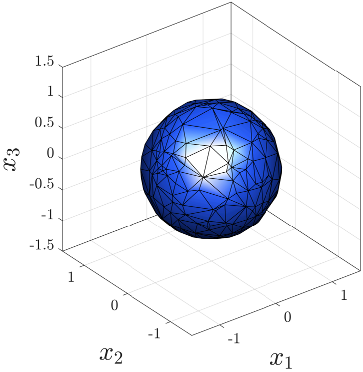
Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Küre ($\mathbb{R}^3$)

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \|x\| \leq 1\}$$

veya

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^T x \leq 1\}$$

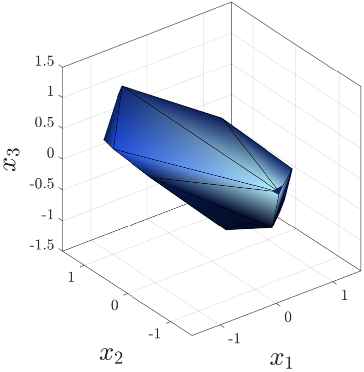


Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Çokyüzlü (*polyhedron*) ($\mathbb{R}^3$)

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \leq b\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & -0.7 \\ -0.2 & -0.3 & 1.5 \\ 0.5 & -0.7 & -0.3 \\ -1.2 & 0.1 & -1.2 \\ 1.8 & 0.1 & 0.8 \\ -0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 2.6 & 1.4 & 0.4 \\ -1 & -0.9 & -1.2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

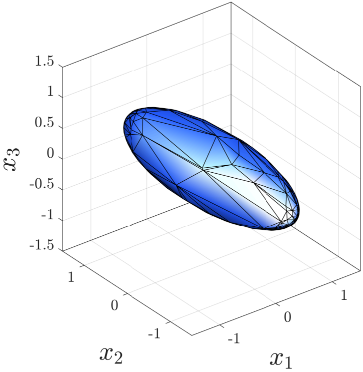


Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

Elipsoit (*ellipsoid*) ($\mathbb{R}^3$)

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^T P x \leq 1\}$$

$$P = \begin{bmatrix} 8.8 & 4 & -7.7 \\ 4 & 2.6 & -4.9 \\ -7.7 & -4.9 & 13.1 \end{bmatrix}$$



Küme oluşturucu notasyonu - Örnekler

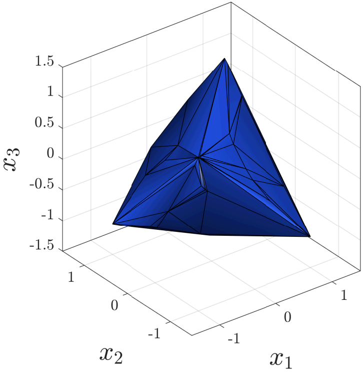
Spektrahedron ($\mathbb{R}^3$)

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + I \in \mathbb{S}^3_+\}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Bölüm 2

Vektör uzayları ve altuzaylar

Vektör uzayları

bir vektör uzayı (*vector space*) (veya doğrusal uzay (*linear space*)), elemanları birbiriyle toplanabilen ve skalerler ile çarpılabilen vektörlerden oluşan bir kümedir.

reel sayılar üzerinde tanımlı bir vektör uzayı

- bir $\mathcal{V}$ kümesi
- bir vektör toplama: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$
- bir skaler çarpım: $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$
- bir belirli (*distinguished*) eleman $0 \in \mathcal{V}$

unsurlarından oluşur

Vektör uzayları

bir vektör uzayının unsurları şu özelliklere sahiptir:

- $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathcal{V}$ (toplama işlemi değişmeli (*commutative*))
- $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in \mathcal{V}$ (toplama işlemi birleşmeli (*associative*))
- $0 + x = x$, $\forall x \in \mathcal{V}$ (0 toplama işleminde etkisiz/birim (*identity*) eleman)
- $\forall x \in \mathcal{V}\ \exists(-x) \in \mathcal{V}$ öyle ki $x + (-x) = 0$ (toplama işlemine dair ters (*inverse*) mevcut)
- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{V}$ (skaler çarpım birleşmeli)
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in \mathcal{V}$ (sağdan dağılma (*distributive*) kuralı)
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{V}$ (soldan dağılma kuralı)
- $1x = x$, $\forall x \in \mathcal{V}$

Vektör uzayları - Örnekler

- $\mathcal{V}_1 = \mathbb{R}^n$, standart (eleman bazında (*componentwise*)) vektör toplama ve skaler çarpım ile
- $\mathcal{V}_2 = \{0\}$ (burada $0 \in \mathbb{R}^n$)
- $\mathcal{V}_3 = \mathrm{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ $(v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n)$
- not: $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ şeklindeki bir vektör kümesinin gerdiği uzay $\mathrm{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ ile gösterilir ve

  $$\mathrm{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \,|\, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

  olarak tanımlanır. $\mathrm{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ vektör kümesinin bütün doğrusal bileşimlerini içeren kümedir

Altuzaylar

$$1)\, x + y \in \mathcal{S} \quad \text{her } x,\, y \in \mathcal{S} \text{ için}$$
$$2)\, \alpha\, x \in \mathcal{S} \quad \text{her } \alpha \in \mathbb{R} \text{ ve } x \in \mathcal{S} \text{ için}$$

sağlanıyorsa $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine bir altuzay (*subspace*) denir

- altuzaylar toplamaya göre kapalıdır (1)
- altuzaylar skaler çarpmaya göre kapalıdır (2)
- not: bir kümenin bir işleme göre kapalı olması, o kümenin eleman veya elemanlarına o işlem uygulandığında oluşan sonucun da kümenin elemanı olduğu anlamına gelir

Altuzaylar - Örnekler

- $\mathbb{R}^2$ için orijinden geçen bir doğru
- $\mathbb{R}^3$ için orijinden geçen bir doğru veya bir düzlem
- $\mathcal{S}_1 = \mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n$ kendisinin bir altuzayıdır
- $\mathcal{S}_2 = \{0\}$: $\mathbb{R}^n$'nin en küçük altuzayı orijini içeren kümedir
- $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinin gerdiği uzay (vektörlerin bütün doğrusal bileşimlerini içeren küme) bir altuzaydır: $\mathcal{S}_3 = \operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$
- iki altuzayın toplamı bir altuzaydır:

$$\mathcal{S}_4 = \mathcal{S} + \mathcal{T} = \{x + y \,|\, x \in \mathcal{S},\, y \in \mathcal{T}\}$$

Dikgen altuzaylar

- $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^n$ altuzayları

$$x^T y = 0 \quad \text{her } x \in \mathcal{S},\ y \in \mathcal{T} \text{ için}$$

  koşulu sağlanıyorsa dikgen altuzaylardır
- her $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi için,

$$S^{\perp} = \{x \,|\, x^T y = 0 \quad \text{her } y \in \mathcal{S} \text{ için}\}$$

  ile verilen kümeye $\mathcal{S}$'nin "dikgen tümleyeni" (*orthogonal complement*) denir
- $\mathcal{S}$ altuzay olmasa bile $S^{\perp}$ daima bir altuzaydır
- $S^{\perp}$ her biri, $\mathcal{S}$'nin elemanı olan bütün vektörlere dikgen olan vektörlerden oluşan kümedir

Bölüm 3

Sıfır uzayı

Bir matrisin sıfır uzayı

bir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin sıfır uzayı (*nullspace*)

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

olarak tanımlanır

- $\mathcal{N}(A)$, $\mathbb{R}^n$'nin bir altuzayıdır
- $\mathcal{N}(A)$, $y = Ax$ işlemiyle sıfıra eşlenen vektörlerin kümesidir
- $\mathcal{N}(A)$, A'nın bütün satırlarına dikgen olan vektörlerin kümesidir

$\mathcal{N}(A)$, $y = Ax$ için x'teki belirsizliği (*ambiguity*) verir:

- $y = Ax$ ve $z \in \mathcal{N}(A)$ ise, $y = A(x + z)$ olur
- diğer taraftan, $y = Ax$ ve $y = A\tilde{x}$ ise, bazı $z \in \mathcal{N}(A)$ için $\tilde{x} = x + z$ olur

$\mathcal{N}(A)$ asla boş küme olmaz; 0 daima $\mathcal{N}(A)$'nin bir elemanıdır

Tek elemanı 0 olan sıfır uzayı

bir A matrisinin sıfır uzayının tek elemanı 0 ise A'ya bire bir (*one-to-one*) denir.

bu durum (yani, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$) aşağıdakilere denktir:

- x her zaman $y = Ax$'ten eşsiz biçimde hesaplanabilir (yani, $y = Ax$ şeklindeki doğrusal dönüşüm enformasyon 'kaybetmez')
- x'ten Ax'e eşleme (*mapping*) bire birdir: farklı x'ler farklı y'ler ile eşlenir
- A'nın sütunları doğrusal bağımsızdır (dolayısıyla, sütunlar gerdikleri uzayın bir tabanıdır)
- A'nın bir sol tersi mevcuttur (yani, $BA = I$'yı sağlayan bir $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrisi mevcuttur)
- $A^T A$ tersi alınabilir matristir

Sıfır uzayının yorumlanması - Ölçüm

$z \in \mathcal{N}(A)$ olsun. $y = Ax$, x'in ölçümünü (*measurement*) temsil etsin

- z algılayıcılardan (*sensor*) tespit edilemez (algılayıcılardan 0 değeri okunur)
- x ve $x + z$ algılayıcılardan gelen değerlerden ayırt edilemez: $Ax = A(x + z)$

$\mathcal{N}(A)$, ölçüm $y = Ax$ ile x'in bulunmasındaki belirsizliği belirtir

genel anlamda, $\mathcal{N}(A)$'nin büyük olması ölçüm (algılayıcı okuma) problemleri için olumsuzdur (çok belirsizlik var demektir)

Sıfır uzayının yorumlanması - Çıkış

$z \in \mathcal{N}(A)$ olsun. $y = Ax$, giriş (*input*) x'ten dolayı oluşan çıkışı (*output*) temsil etsin

- z herhangi bir sonucu olmayan bir giriştir
- x ve $x + z$'nin sonucu aynıdır

$\mathcal{N}(A)$, belirli bir sonuç oluşturmak için uygulanması gereken girişteki seçme özgürlüğünü belirtir

genel anlamda, $\mathcal{N}(A)$'nin büyük olması tasarım/kontrol problemleri için olumludur (çok seçme özgürlüğü var demektir)

Bölüm 4

Erim

Bir matrisin erimi

bir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin **erim**i (*range*)

$$\mathcal{R}(A) = \{Ax \,|\, x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

olarak tanımlanır. erime **sütun uzayı** (*column space*) ve **değer kümesi** (*image*) de denir

- $\mathcal{R}(A)$, $\mathbb{R}^m$'nin bir altuzayıdır
- $\mathcal{R}(A)$, doğrusal fonksiyon $y = Ax$ ile ulaşılabilen vektörlerin kümesidir
- $\mathcal{R}(A)$, A'nın sütunlarının gerdiği uzaydır: A'nın sütunları $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olsun. $\mathrm{span}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathcal{R}(A)$
- $\mathcal{R}(A)$, $Ax = y$'nin bir çözümünün olmasını sağlayan y vektörlerinin kümesidir

Örten matrisler

bir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin görüntü kümesi $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$ ise A'ya örten (*onto*) denir

bu durum (yani, $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$) aşağıdakilere denktir:

- $Ax = y$ denklemi her y için x'e göre çözülebilir
- A'nın sütunları $\mathbb{R}^m$'yi gerer
- A'nın bir sağ tersi mevcuttur (yani, $AB = I$'yı sağlayan bir $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrisi mevcuttur)
- A'nın satırları doğrusal bağımsızdır
- $\mathcal{N}(A^T) = \{0\}$
- AA^T tersi alınabilir matristir

Erimin yorumlanması - Ölçüm

$v \in \mathcal{R}(A)$ ve $w \notin \mathcal{R}(A)$ olsun. $y = Ax$, x'in ölçümünü temsil etsin

- $y = v$ mümkün (*possible*) veya tutarlı (*consistent*) bir algılayıcı sinyalidir
- $y = w$ imkansız (*impossible*) veya tutarsız (*inconsistent*) bir algılayıcı sinyalidir: algılayıcılar arızalanmıştır veya model yanlıştır

$\mathcal{R}(A)$, algılayıcılardan okunması mümkün olan bütün değerleri belirtir

Erimin yorumlanması - Çıkış

$v \in \mathcal{R}(A)$ ve $w \notin \mathcal{R}(A)$ olsun. $y = Ax$, giriş x'ten dolayı oluşan çıkışı temsil etsin

- v mümkün bir sonuç veya çıkıştır
- w bir sonuç veya çıkış olamaz

$\mathcal{R}(A)$, oluşturulması mümkün olan sonuçları veya çıkışları belirtir

Bölüm 5

Kerte

Bir matrisin kertesi

bir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin **kerte**si (*rank*)

$$\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathcal{R}(A))$$

olarak tanımlanır (yazıyla: bir matrisin kertesi, o matrisin eriminin boyutudur)

matris kertesiyle ilgili bazı özellikler:

- $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T)$
- $\mathbf{rank}(A)$ bir A matrisinin en büyük doğrusal bağımsız sütun (veya satır) sayısını verir, dolayısıyla $\mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$

Bir matrisin kertesi

- $\text{rank}(A)$ bir A matrisinin en büyük doğrusal bağımsız sütun sayısıdır. bunu görmek için:
  - A'nın sütunları doğrusal bağımsız ise, sütunlar erim için bir taban oluşturduğundan, sütun sayısı kerteye eşittir
  - A'nın sütunları doğrusal bağımsız değilse, diğer sütunların gerdiği uzayda bir sütun mevcuttur. bunu kümeden çıkartırız, gerekirse bu işlemi tekrarlarız. sonuç olarak elimizde bir doğrusal bağımsız vektör kümesi kalır. bu kümenin eleman sayısı, matrisin kertesidir

örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ kümesinde 3 vektör var ancak bu küme doğrusal bağımlı (örneğin: $v_1 = v_3 - v_2$). kümeden v_1'yi çıkartalım: $\{v_2, v_3\}$. bu kümede 2 vektör var ve küme doğrusal bağımsız. bu kümedeki vektör sayısı, A matrisinin kertesidir. dolayısıyla, $\text{rank}(A) = 2$

Boyut korunumu

$$\mathrm{rank}(A) + \dim(\mathcal{N}(A)) = n \quad (A \in \mathbb{R}^{m \times n})$$

boyut korunumunun yorumlanması:

- $\mathrm{rank}(A)$, $y = Ax$ işlemiyle ulaşılabilen y vektörlerinden oluşan kümenin boyutudur
- $\dim(\mathcal{N}(A))$, $y = Ax$ işlemiyle 0 sonucunu veren x vektörlerinden oluşan kümenin boyutudur
- "boyut korunumu": her giriş boyutu ya 0'a dönüşür ya da çıkışta gözükür
- kabaca söylemek gerekirse:
  - n, giriş x'teki serbestlik derecelerinin (*degrees of freedom*) sayısıdır
  - $\dim(\mathcal{N}(A))$, x'ten $y = Ax$'e eşleme (*mapping*) esnasında kaybolan serbestlik derecelerinin sayısıdır
  - $\mathrm{rank}(A)$, çıkış y'deki serbestlik derecelerinin sayısıdır

Satır ve sütun kertelerinin eşitliği

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi verilsin.

- satır kertesi (*row rank*) A'nın satır uzayının boyutu: $\dim(\mathcal{R}(A^T))$
- sütun kertesi (*column rank*): A'nın eriminin (sütun uzayının) boyutu: $\dim(\mathcal{R}(A))$

satır ve sütun kerteleri eşittir:
$\dim(\mathcal{R}(A^T)) = \dim(\mathcal{R}(A)) = \mathrm{rank}(A)$

Tam kerteli matrisler

($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ için $\mathrm{rank}(A) \le \min(m,n)$ daima geçerlidir)

$\mathrm{rank}(A) = \min(m,n)$ ise A'ya tam kerteli (*full rank*) denir

bir $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisinin tam kerteli olması

- A kare matris ($m = n$) ise A'nın tersi alınabilir olduğu anlamına gelir ($\mathrm{rank}(A) = m = n$)
- A uzun matris ($m \ge n$) ise A'nın sütunlarının doğrusal bağımsız olduğu anlamına gelir (bu durumda A'ya "tam sütun kerteli" (*full column rank*) denir ($\mathrm{rank}(A) = n$); A sol tersi alınabilir matristir)
- A geniş matris ($m \le n$) ise A'nın satırlarının doğrusal bağımsız olduğu anlamına gelir (bu durumda A'ya "tam satır kerteli" (*full row rank*) denir ($\mathrm{rank}(A) = m$); A sağ tersi alınabilir matristir)

Matris kertesi - Örnekler

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow m = 3,\ n = 3,\ \mathrm{rank}(A) = 3,\ A$ tersi alınabilir
- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow m = 3,\ n = 3,\ \mathrm{rank}(A) = 2,\ A$ tam kerteli değil
- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow m = 3,\ n = 4,\ \mathrm{rank}(A) = 3,\ A$ tam satır kerteli
- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow m = 3,\ n = 2,\ \mathrm{rank}(A) = 2,\ A$ tam sütun kerteli
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow m = 3,\ n = 4,\ \mathrm{rank}(A) = 1,\ A$ tam kerteli değil

Bölüm 6

Dikgenlik

Birim dikgen vektör kümesi

$\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ şeklinde bir vektör kümesi

- $\|u_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k$ için$)$ ise düzgelenmiştir (*normalized*)
- $i \neq j$ için $u_i \perp u_j$ ise dikgendir (*orthogonal*)
- hem dikgen hem de düzgelenmiş ise birim dikgendir (*orthonormal*)

dikkat: birim dikgenlik (doğrusal bağımsızlık gibi) vektör kümelerinin bir özelliğidir (bireysel olarak vektörlerin değil). bundan dolayı "$u_1, u_2, \ldots, u_k$ vektörleri birim dikgen vektörlerdir" demek doğru değildir. "$\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ vektör kümesi birim dikgen bir kümedir" demek doğrudur

Birim dikgenlik

- $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ kümesindeki vektörler sütunlar olacak şekilde bir U matrisi yazalım: $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_k \end{bmatrix}$
- U'nun sütunlarından oluşan kümenin birim dikgen olduğunu göstermek için $U^T U = I_k$ yazabiliriz
- birim dikgen bir vektör kümesi doğrusal bağımsızdır
- böyle olduğunu görmek için $Ux = 0$'ı U^T ile çarpabiliriz
- dolayısıyla $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ vektör kümesi, bu vektörlerin gerdiği uzay (veya, U'nun erimi) için bir **birim dikgen taban**dır (*orthonormal basis*)

$\mathbb{R}^n$ için birim dikgen taban

bir U matrisi verilsin. U kare matris ise ve $U^T U = I$ ise U'ya dikgen (*orthogonal*) matris denir

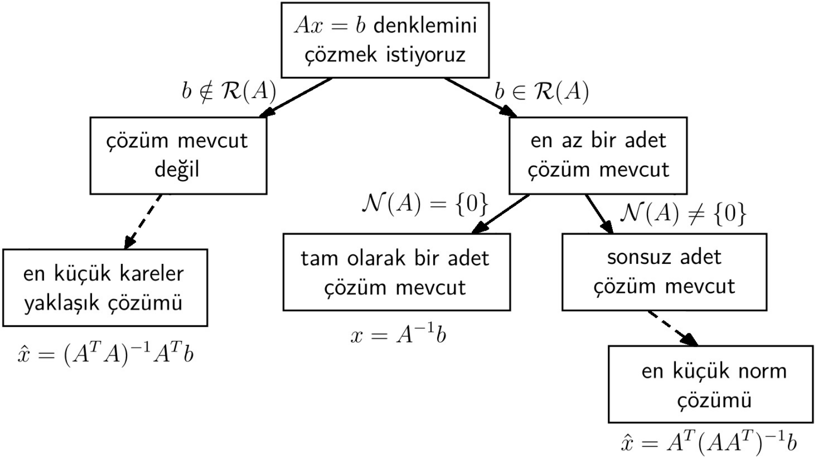
- $u_1, u_2, \ldots, u_n$, U'nın sütunları olsun
- $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ile verilen vektör kümesi, $\mathbb{R}^n$ için bir birim dikgen tabandır
- buradan $U^{-1} = U^T$ $(U^T U = I)$ yazılabilir. benzer şekilde:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i u_i^T = I$$

Bölüm 7

Doğrusal denklemlerin çözümü

Doğrusal denklemlerin çözümü



Doğrusal denklemlerin çözümü

denklem: $Ax = b \quad (A \in \mathbb{R}^{m\times n},\, b \in \mathbb{R}^m)$

1) çözümün varlığı (*existence*): aşağıdakiler denktir:

- $\mathrm{rank}(A) = m$ (A tam satır kerteli)
- $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$ (A örten) ($b \in \mathcal{R}(A)$)
- her $b \in \mathbb{R}^m$ için, $Ax = b$'nin en az bir çözümü mevcuttur

2) çözümün eşsizliği (*uniqueness*): aşağıdakiler denktir:

- $\mathrm{rank}(A) = n$ (A tam sütun kerteli)
- $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ (A bire bir)
- $\hat{x}$, $Ax = b$'nin çözümü ise, mevcut tek çözüm budur

koşullar 1) ve 2) sağlanıyorsa (yani, $\mathrm{rank}(A) = m = n$), A kare matris olmak zorundadır. bu durumda A tersi alınabilirdir ve $Ax = b$'nin eşsiz çözümü $x = A^{-1}b$ ile verilir

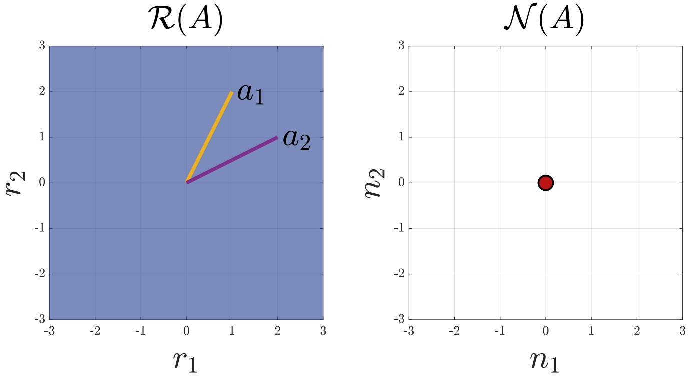
Bölüm 8

Örnekler

Örnek 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$m = 2 \qquad n = 2 \qquad \operatorname{rank}(A) = 2 \qquad \dim(\mathcal{N}(A)) = 0$$

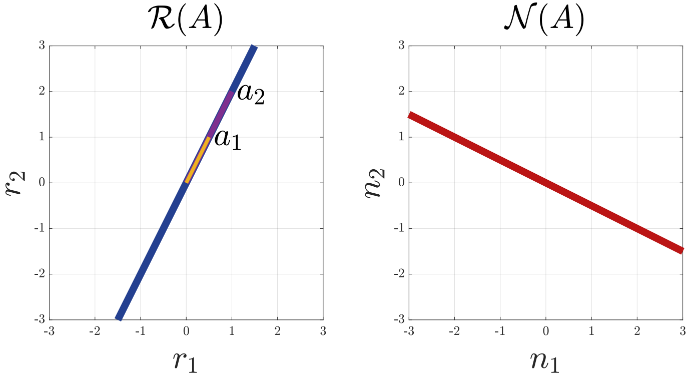


A tam kerteli. A tersi alınabilir. her $b \in \mathbb{R}^2 = \mathcal{R}(A)$ için eşsiz bir çözüm ($x = A^{-1}b$) mevcut ($\mathcal{N}(A) = \{0\}$)

Örnek 2

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad a_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$m = 2 \qquad n = 2 \qquad \text{rank}(A) = 1 \qquad \dim(\mathcal{N}(A)) = 1$$

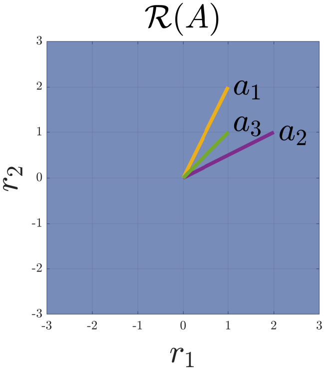


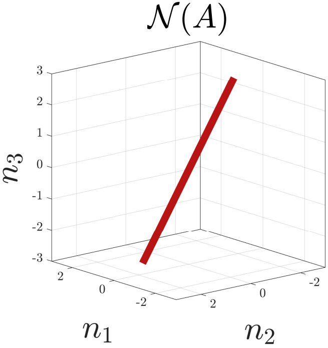
A tam kerteli değil. A tersi alınabilir değil. her $b \in \mathcal{R}(A)$ için sonsuz adet çözüm mevcut ($\mathcal{N}(A) \neq \{0\}$)

Örnek 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$m = 2 \qquad n = 3 \qquad \text{rank}(A) = 2 \qquad \dim(\mathcal{N}(A)) = 1$$



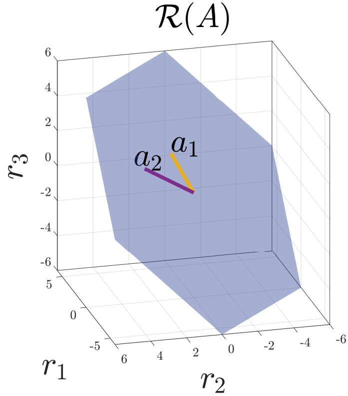


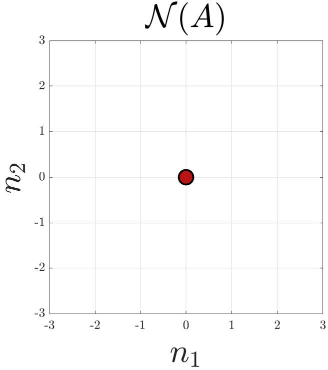
A tam satır kerteli. A'nın sağ tersi mevcut. her $b \in \mathcal{R}(A)$ için sonsuz adet çözüm mevcut ($\mathcal{N}(A) \neq \{0\}$)

Örnek 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$m = 3 \qquad n = 2 \qquad \mathrm{rank}(A) = 2 \qquad \dim(\mathcal{N}(A)) = 0$$



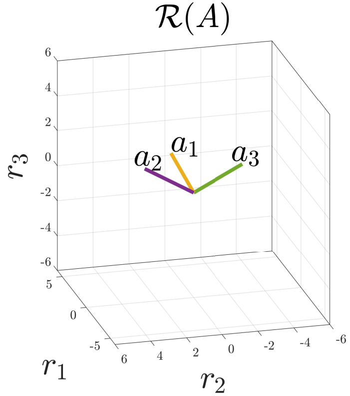


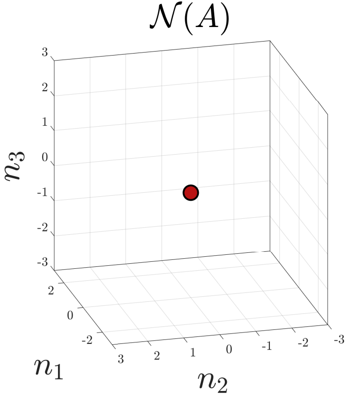
A tam sütun kerteli. A'nın sol tersi mevcut. her $b \in \mathcal{R}(A)$ için eşsiz bir çözüm mevcut ($\mathcal{N}(A) = \{0\}$)

Örnek 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$m = 3 \qquad n = 3 \qquad \mathrm{rank}(A) = 3 \qquad \dim(\mathcal{N}(A)) = 0$$



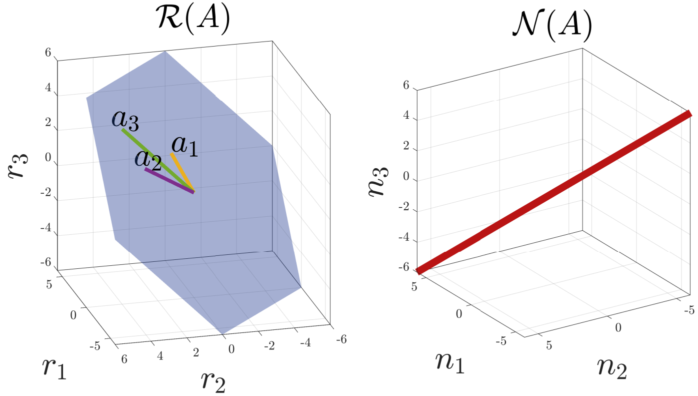


A tam kerteli. A tersi alınabilir. her $b \in \mathbb{R}^3 = \mathcal{R}(A)$ için eşsiz bir çözüm ($x = A^{-1}b$) mevcut ($\mathcal{N}(A) = \{0\}$)

Örnek 6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$m = 3 \qquad n = 3 \qquad \operatorname{rank}(A) = 2 \qquad \dim(\mathcal{N}(A)) = 1$$



A tam kerteli değil. A tersi alınabilir değil. her $b \in \mathcal{R}(A)$ için sonsuz adet çözüm mevcut ($\mathcal{N}(A) \neq \{0\}$)