Doğrusal Fonksiyonlar

Dr. Öğr. Üyesi Işık İlber Sırmatel

T.C. Trakya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kontrol Anabilim Dalı

Kaynak (source)

Lecture Slides for Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares.
Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe

Konu listesi

1. Doğrusal ve afin fonksiyonlar

2. Örnek: Taylor yaklaşıklığı

3. Örnek: Bağlanım modeli

Bölüm 1

Doğrusal ve afin fonksiyonlar

Toplanırlık ve doğrusal fonksiyonlar

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f'in n-vektörleri sayılara eşleyen bir fonksiyon olduğu anlamına gelir
- $$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

  ifadesi bütün α ve β sayıları ile bütün x ve y n-vektörleri için sağlanıyorsa f *toplanırlık* (superposition) özelliğine sahiptir
- bu ifadeyi çok dikkat ederek (notasyon anlamında) çözümleyin
- toplanırlık özelliğine sahip fonksiyonlara *doğrusal* (linear) denir

İç çarpım fonksiyonu

- bir a n-vektörü ile

$$f(x) = a^T x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

  fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur
- $f(x)$, x'in elemanlarının bir ağırlıklı toplamıdır
- iç çarpım fonksiyonu doğrusaldır:

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= a^T(\alpha x + \beta y) \\ &= a^T(\alpha x) + a^T(\beta y) \\ &= \alpha(a^T x) + \beta(a^T y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

İç çarpım fonksiyonu

Bütün doğrusal fonksiyonlar birer iç çarpım fonksiyonudur.

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$'in doğrusal olduğunu varsayalım
- bu halde f, bazı a'lar için $f(x) = a^T x$ olarak ifade edilebilir (özel olarak: $a_i = f(e_i)$)
- bu özellik şu ifadelerden kaynaklanır

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n) \\ &= x_1 f(x_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n) \end{aligned}$$

Afin fonksiyonlar

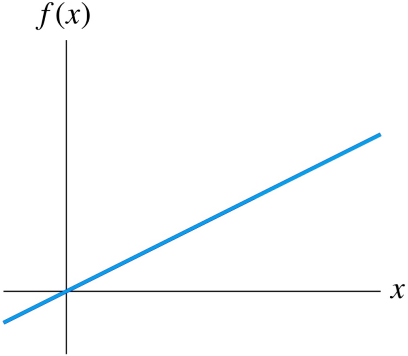
- doğrusal bir ifade ile bir sabitin toplamı formundaki fonksiyonlara afin (*affine*) fonksiyon denir
- genel formu $f(x) = a^T x + b$ şeklindedir (a n-vektör, b skaler)
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ile verilen bir fonksiyon ancak ve ancak (*if and only if*)

  $$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

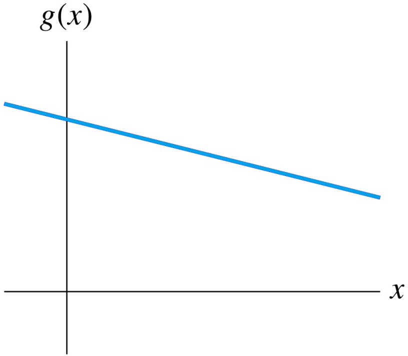
  ifadesi, $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan bütün α ve β sayıları ile bütün x ve y vektörleri için sağlanıyorsa afindir
- bazen (hatalı şekilde) afin fonksiyonlardan doğrusal olarak bahsedilir

Doğrusal vs. afin fonksiyonlar

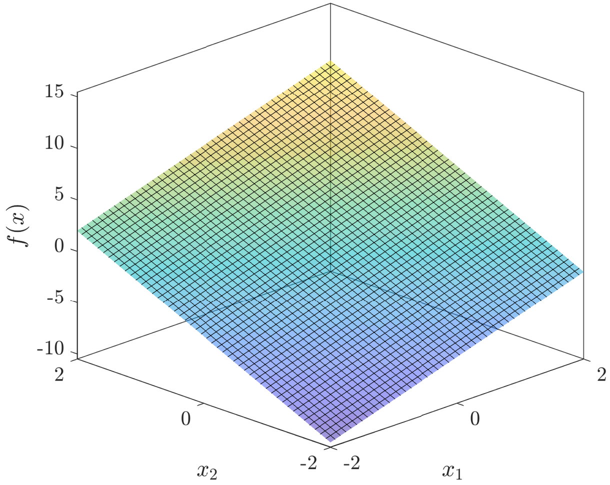
f doğrusaldır



g afindir (doğrusal değildir)

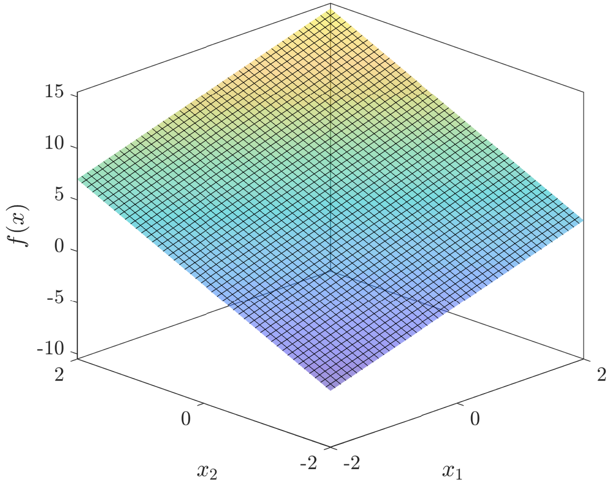


Doğrusal fonksiyon ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)



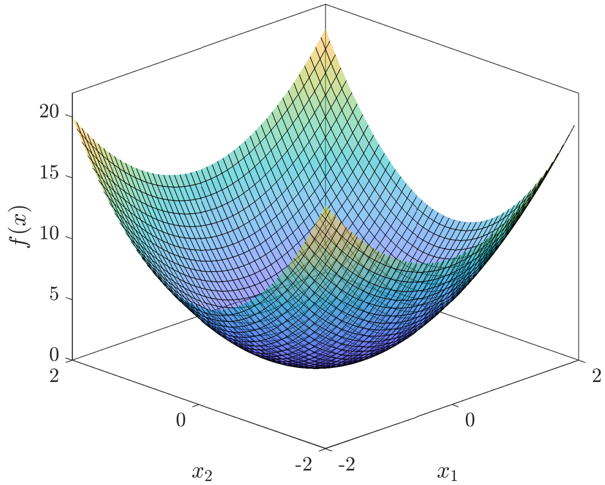
$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Afin fonksiyon ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)



$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 5$$

Karesel fonksiyon ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)



$$f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2$$

Bölüm 2

Örnek: Taylor yaklaşıklığı

Birinci-derece Taylor yaklaşıklığı

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım
- f'in z noktası civarındaki birinci-derece Taylor yaklaşıklığı (*approximation*):

$$\hat{f}(x) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(z)(x_1 - z_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(z)(x_n - z_n)$$

- x_i'lerin hepsi z_i'lere yakın olduğunda $\hat{f}(x)$ $f(x)$'e çok benzerdir
- $\hat{f}$ x'in bir afin fonksiyonudur
- iç çarpım ile

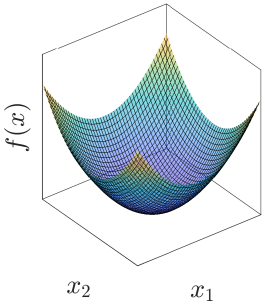
$$\hat{f}(x) = f(z) + \nabla f(z)^T (x - z)$$

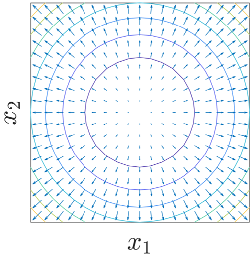
formunda yazılabilir. buradaki n-vektör $\nabla f(z)$, f'in z noktasındaki gradyanıdır

Not: Gradyan

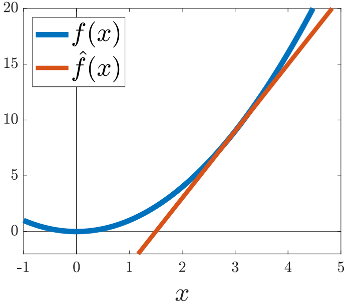
$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

örnek: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad f(x) = x_1^2 + x_2^2$ $\quad \nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$





Birinci-derece Taylor yaklaşıklığı - Örnek



$$f(x) = x^2$$

$$z = 3$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(z) = 6$$

$$\hat{f}(x) = f(z) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(z)(x - z)$$

$$\hat{f}(x) = 9 + 6(x - 3)$$

$$\hat{f}(x) = 6x - 9$$

Bölüm 3

Örnek: Bağlanım modeli

Bağlanım modeli

- bağlanım (*regression*) modeli

$$\hat{y} = \beta^T x + \nu$$

  şeklindedir ve x'in bir afin fonksiyonudur
- x bir öznitelik (*feature*) vektörüdür; elemanları x_i'lere açıklayıcı değişken (*regressor*) denir
- n-vektör β'ya ağırlık vektörü denir
- skaler ν'ye kayma (*offset*) denir
- skaler $\hat{y}$'ye öngörü (*prediction*) denir (bazı gerçek sonuçlarla ilgili, veya y ile gösterilen bağımlı değişkenlerle ilgili öngörü)

Bağlanım modeli

örnek: ev fiyatı tahmin sistemi

- y ev satış fiyatı (belirli bir konum ve zaman aralığı için)
- açıklayıcı değişken vektörü x:

$$x = \begin{bmatrix} \text{alan} \\ \text{oda sayısı} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- ağırlık vektörü ve kayma:

$$\beta = \begin{bmatrix} 1.6 \\ -9.4 \end{bmatrix} \qquad \nu = 55$$

- ev satışları verisinden β ve ν parametrelerinin nasıl tahmin edileceğine daha sonra bakacağız

Bağlanım modeli

örnek: ev fiyatı tahmin sistemi

$$\boxed{\hat{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.6 & -9.4 \end{bmatrix}}_{\beta^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{55}_{\nu}}$$

ev no.	x_1 (alan, m^2)	x_2 (oda sayısı)	y (fiyat, $\times 10^3$ \$)	$\hat{y}$ (fiyat öngörüsü, $\times 10^3$ \$)
1	80	2	115.00	164.20
2	125	4	234.50	217.40
3	110	6	198.00	174.60
4	280	8	528.00	427.80
5	370	10	572.00	553.00

Bağlanım modeli

örnek: ev fiyatı tahmin sistemi