Doğrusal Denklemler

T.C. Trakya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kontrol Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Işık İlber Sırmatel
sirmatel.github.io

Kaynak (source)

Lecture Slides for Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares.
Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe

Konu listesi

1. Doğrusal fonksiyonlar
2. Doğrusal fonksiyon modelleri
3. Doğrusal denklemler
4. Örnek: Yayınım sistemleri

Bölüm 1

Doğrusal fonksiyonlar

Vektörel fonksiyonlar

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f'in n-vektörleri m-vektörlere eşleyen (*map*) bir fonksiyon olduğunu gösterir. f'e vektörel fonksiyon (*vector function* veya *vector-valued function*) denir
- $$f(x) = f\left(\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x\in\mathbb{R}^n}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}}_{f(x)\in\mathbb{R}^n}$$

Toplanırlık

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektörel fonksiyonunu ele alalım
- bütün $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

  sağlanıyorsa f toplanırlık (*superposition*) şartını sağlar
- bu durumda f'e doğrusal (*linear*) denir

Matris-vektör çarpım fonksiyonu

- $m \times n$ matris A ile, f'i $f(x) = Ax$ olarak tanımlayalım
- f doğrusaldır:

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha x + \beta y) \\ &= A(\alpha x) + A(\beta y) \\ &= \alpha(Ax) + \beta(Ay) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

- bunun tersi de doğrudur: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ doğrusal ise:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n) \\ &= Ax \end{aligned}$$

sağlanır. burada $A = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{bmatrix}$

Örnekler

- ters çevirme (*reversal*):

$$f(x) = Ax = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- hareketli toplam (*running sum*)

$$f(x) = Ax = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Afin fonksiyonlar

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu
$$f(x) = Ax + b$$
formunda (yani, bir doğrusal fonksiyon ile bir sabitin toplamı) ise, f bir afin (*affine*) fonksiyondur
- başka şekilde ifade edersek: bütün $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta = 1$ için
$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$
sağlanıyorsa f afin fonksiyondur
- f'den A ve b hesaplanabilir:
$$A = \begin{bmatrix} f(e_1) - f(0) & f(e_2) - f(0) & \cdots & f(e_n) - f(0) \end{bmatrix}$$
$$b = f(0)$$
- bazen (hatalı şekilde) afin fonksiyonlardan doğrusal olarak bahsedilir

Bölüm 2

Doğrusal fonksiyon modelleri

Doğrusal ve afin fonksiyon modelleri

- çoğu uygulamada, n-vektörler ve m-vektörler arası bağıntılar doğrusal veya afin fonksiyonlar kullanılarak yaklaşık olarak ifade edilir
- bazı hallerde yaklaşıklık (*approximation*) çok iyidir ve değişkenlerin geniş değer aralıkları için geçerlidir (örneğin, elektromanyetik sistemler)
- bazı başka hallerde yaklaşıklık nispeten küçük aralıklarda makul surette iyidir (örneğin, uçak dinamikleri)
- diğer hallerde yaklaşıklık çok iyi değildir ancak yine de kullanışlıdır (örneğin, ekonometrik modeller)

Talep esnekliği

- n adet mal veya hizmeti ele alalım
- n-vektörler p ve d fiyatları ve talebi ifade eder
- $\delta_i^{\text{fiyat}} = (p_i^{\textit{yeni}} - p_i)/p_i$ fiyatlardaki oransal değişimler
- $\delta_i^{\text{talep}} = (d_i^{\textit{yeni}} - d_i)/d_i$ taleplerdeki oransal değişimler
- fiyat-talep esneklik modeli: $\delta^{\text{talep}} = E\delta^{\text{fiyat}}$

- aşağıdakilerin ne anlama geldiğini inceleyiniz

$$E_{11} = -0.3, \quad E_{12} = +0.1, \quad E_{23} = -0.05$$

Taylor serisi yaklaşıklığı

- türevlenebilir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ için f'in z noktası civarındaki birinci-derece Taylor yaklaşıklığı (*approximation*):

$$\begin{aligned}\hat{f}_i(x) &= f_i(z) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(z)(x_1 - z_1) + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(z)(x_n - z_n) \\ &= f_i(z) + \nabla f_i(z)^T(x - z)\end{aligned}$$

- kompakt notasyon ile: $\hat{f}(x) = f(z) + Df(z)(x - z)$
- buradaki $m \times n$ matris $Df(z)$, f'in z noktasındaki Jakobi matrisidir (*Jacobian*) (veya, kısmı türevler matrisi):

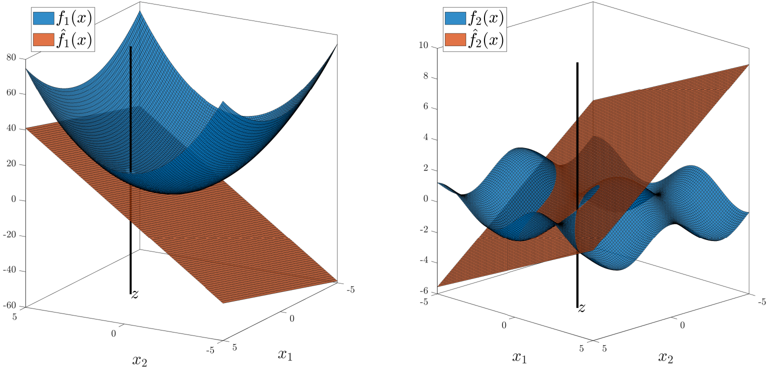
$$Df(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(z) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(z) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(z) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(z) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(z) \end{bmatrix}$$

- z'ye yakın x için $\hat{f}(x)$ $f(x)$'in çok iyi bir yaklaşıklığıdır
- $\hat{f}$ x'in bir afin fonksiyonudur

Taylor serisi yaklaşıklığı - Örnek

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + 2x_2^2 \\ \sin(x_1) + \cos(x_2) \end{bmatrix} \quad Df(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 4x_2 \\ \cos(x_1) & -\sin(x_2) \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \hat{f}(x) = \begin{bmatrix} \hat{f}_1(x) \\ \hat{f}_2(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ 0.4253 \end{bmatrix}}_{f(z)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0.5403 & -0.9093 \end{bmatrix}}_{Df(z)} (x - z)$$



Bağlanım modeli

- bağlanım modeli: $\hat{y} = x^T\beta + \nu$
- n-vektör x öznitelikler/açıklayıcı değişkenler vektörü
- n-vektör β model parametreleri vektörü
- ν kayma (*offset*) parametresi
- skaler $\hat{y}$, y'ye ilişkin öngörü/tahmin
- N adet örneklem $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}$ ve bağlantılı veri noktaları $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(N)}$
- bağlantılı öngörüler: $\hat{y}^{(i)} = (x^{(i)})^T\beta + \nu$
- bağlanım modelini vektör-matris formunda yazalım: $\hat{y}^{\mathsf{d}} = X^T\beta + \nu\mathbf{1}$
  - X öznitelik matrisi; sütunları $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}$
  - N-vektör y^{d} veri noktaları vektörü (elemanları $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(N)}$)
  - N-vektör $\hat{y}^{\mathsf{d}}$ öngörüler vektörü (elemanları $\hat{y}^{(1)}, \hat{y}^{(2)}, \ldots, \hat{y}^{(N)}$)
- öngörü hataları vektörü: $y^{\mathsf{d}} - \hat{y}^{\mathsf{d}} = y^{\mathsf{d}} - X^T\beta - \nu\mathbf{1}$

Bölüm 3

Doğrusal denklemler

Doğrusal denklem takımları

- n değişkenli $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ m adet doğrusal denklemden oluşan denklem takımı (veya sistemi):

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- n-vektör x'e değişken (*variable*) veya bilinmeyenler (*unknowns*) denir
- A_{ij} katsayılardır; A'ya katsayı matrisi denir
- b'ye sağ el tarafı (*right-hand side*) denir
- kompakt notasyon ile: $Ax = b$

Doğrusal denklem takımları

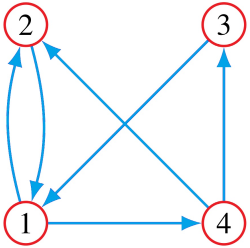
- Doğrusal denklem takımları şu şekilde sınıflandırılır:
  - $m < n$ (A geniş matris) ise denklem takımı eksik-belirli (*under-determined*)
  - $m = n$ (A kare matris) ise denklem takımı kare
  - $m > n$ (A uzun matris) ise denklem takımı aşırı-belirli (*over-determined*)
- $Ax = b$ ise x'e bir çözüm (*solution*) denir
- A ve b'ye bağlı olarak şu haller mümkündür:
  - çözüm mevcut değil
  - bir adet çözüm mevcut
  - birden fazla çözüm mevcut
- doğrusal denklemlerin nasıl çözüldüğünü daha sonra inceleyeceğiz

Bölüm 4

Örnek: Yayınım sistemleri

Yayınım sistemleri

- Yayınım (*diffusion*) sistemleri akışları (*flow*) ve potansiyelleri (*potential*) betimlemek için fizik ve mühendisliğin birçok alanında yaygın kullanılan modellerdir
- n düğümlü ve m ayrıtlı yönlü çizgeyi ele alalım:



- fiziksel bir büyüklük (örneğin elektrik, ısı, enerji, veya kütle) ayrıtlar üzerinden bir düğümden diğerine akabilir

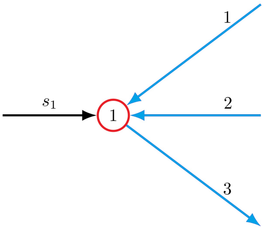
Yayınım sistemleri - Akışlar

- ayrıt j üzerinde bir akış f_j (skaler) tanımlıdır
- m-vektör f bütün akışların vektörüdür
- akış f_j pozitif veya negatif olabilir. pozitifse büyüklük ayrıt yönünde, negatifse ayrıtla ters yönde akıyor demektir
- akışlara örnekler: termik sistemde ısı akışı (birim: W), elektrik devresinde akım (birim: A), hidrolik sistemde su akışı (birim: L/s)
- düğümlerde dış kaynaklı (*exogenous*) akış s_i tanımlanabilir. $s_i > 0$ ise düğüm i'ye akış ekleniyor, $s_i < 0$ akış çıkarılıyor demektir
- dış kaynaklı akışlara örnekler: termik sistemde ısı kaynağı, elektrik devresinde akım kaynağı

Yayınım sistemleri - Akış korunumu

- akış korunumu: her düğümde, düğüme giren akışlarla çıkan akışların toplamı sıfır olmak zorundadır

sağdaki örnekte düğüm 1'e bitişik (*adjacent*) üç ayrıt (düğüm 1'e yönelen ayrıt 1 ve 2, düğüm 1'den ayrılan ayrıt 3) ile bir dış kaynaklı akış (s_1) vardır



- düğüm 1 için akış korunumu

$$f_1 + f_2 - f_3 + s_1 = 0$$

denklemi ile ifade edilir

- yayınım sistemi için akış korunumu

$$Af + s = 0$$

denklemi ile ifade edilir (A çakışım matrisi, s dış kaynaklı akışlar vektörü). elektrik devrelerinde akış korunumuna "Kirchhoff'un akım yasası" denir

Yayınım sistemleri - Potansiyeller

- düğüm i üzerinde bir potansiyel e_i (skaler) tanımlıdır
- n-vektör e bütün potansiyellerin vektörüdür
- potansiyellere örnekler: termik sistemde düğüm sıcaklığı (birim: K), elektrik devresinde elektrik potansiyel (birim: V), hidrolik sistemde su seviyesi (birim: m)

Yayınım sistemleri - Ayrıt akışları

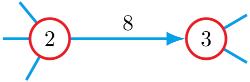
- yayınım sistemlerinde bir ayrıt üzerindeki akış, o ayrıta bitişik düğümler arasındaki potansiyel farkıyla doğru orantılıdır:

$$f_j = \frac{1}{r_j}(e_k - e_l)$$

buradaki r_j'ye (skaler, genellikle pozitif) ayrıt j'nin direnci (*resistance*) denir

sağdaki örnekteki düğüm 2 ile 3'ü bağlayan ayrıt 8 için ayrıt akış denklemi:

$$f_8 = \frac{1}{r_8}(e_2 - e_3)$$



- yayınım sistemi için ayrıt akışları

$$Rf = -A^T e$$

denklemi ile ifade edilir ($R = \mathbf{diag}(r)$ direnç matrisi, r bütün dirençlerin vektörü)

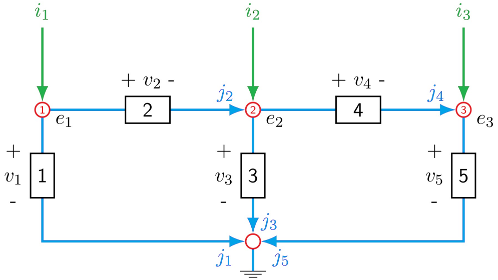
Yayınım sistemleri - Yayınım modeli

- yayınım modeli (birleştirilmiş akış korunumu ve ayrıt akışları denklemleri) bir blok doğrusal denklem sistemi olarak (f, s, ve e değişkenleriyle)

$$\begin{bmatrix} A & I & 0 \\ R & 0 & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ s \\ e \end{bmatrix} = 0$$

  şeklinde ifade edilebilir
- burada $m + 2n$ bilinmeyenli $n + m$ denklem vardır (yani, denklem sistemi eksik-belirlidir). bunlara f, s ve e'nin bazı elemanları belirtilerek ek yapılabilir

Yayınım sistemleri - Örnek: Elektrik devresi



$n = 3$ düğümlü (ayrıca bir toprak (*ground*) düğümü), $m = 5$ ayrıtlı elektrik devresi

- ayrıt akımları: j_1, j_2, j_3, j_4, j_5
- düğüm gerilimleri (toprağa göre): e_1, e_2, e_3
- ayrıt boyunca gerilimler: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5
- dış kaynaklı akımlar: i_1, i_2, i_3
- ayrıt dirençleri: r_1, r_2, r_3, r_4, r_5

Yayınım sistemleri - Örnek: Elektrik devresi

$$\text{çakışım matrisi:} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ayrıt akım. v.:} \quad j = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} \qquad \text{ayrıt ger. v.:} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

$$\text{düğüm ger. v.:} \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \qquad \text{dış kayn. akım. v.:} \quad i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{direnç matrisi:} \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 \end{bmatrix}$$

Yayınım sistemleri - Örnek: Elektrik devresi

- devre denklemleri şu şekildedir:

$$Aj + i = 0 \quad \text{(Kirchhoff'un akım yasası)}$$
$$A^T e + v = 0 \quad \text{(Kirchhoff'un gerilim yasası)}$$
$$v = Rj \quad \text{(Ohm yasası)}$$

- Kirchhoff'un gerilim yasası ve Ohm yasası birleştirilerek (yani, v elenerek) $A^T e + Rj = 0$ denklemi elde edilir, buradan da devre denklemleri şu şekilde oluşur:

$$\begin{bmatrix} R & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \end{bmatrix}$$

- bu, $n + m$ bilinmeyenli $n + m$ denklemden oluşan bir doğrusal denklem takımıdır. bu denklem takımı çözülerek devredeki akımlar ve gerilimler hesaplanabilir