Doğrusal Bağımsızlık

Dr. Öğr. Üyesi Işık İlber Sırmatel

T.C. Trakya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kontrol Anabilim Dalı

Kaynak (source)

Lecture Slides for Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares.

Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe

Konu listesi

1. Tanım
2. Taban
3. Birim dikgen vektörler
4. Gram-Schmidt algoritması

Bölüm 1

Tanım

Doğrusal bağımlılık

- bir n-vektör kümesi $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ $(k \geq 1)$ için

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = 0$$

  şartı, hepsi 0 olmayan bazı $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ için sağlanıyorsa, $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ doğrusal bağımlıdır (*linearly dependent*)
- şuna eşdeğerdir: en az bir a_i diğerlerinin bir doğrusal bileşimidir
- bu durumda, "$a_1, a_2, \ldots, a_k$ vektörleri doğrusal bağımlıdır" denir

- ancak $a_1 = 0$ ise $\{a_1\}$ doğrusal bağımlıdır
- ancak bir a_i diğerinin katı ise $\{a_1, a_2\}$ doğrusal bağımlıdır
- ikiden fazla vektör için basitçe belirtilecek bir şart yoktur

Doğrusal bağımlılık

örnek:

- $$a_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -7 \\ 8.6 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2.2 \end{bmatrix}$$

  vektörleri $a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0$ olduğundan dolayı doğrusal bağımlıdır
- bu vektörlerden herhangi biri diğer ikisinin doğrusal bileşimi olarak ifade edilebilir, örneğin

$$a_2 = -0.5a_1 + 1.5a_3$$

Doğrusal bağımsızlık

- bir n-vektör kümesi $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ $(k \geq 1)$ doğrusal bağımlı değilse, yani

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k = 0$$

  şartı sadece $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$ için sağlanıyorsa, $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ doğrusal bağımsızdır (*linearly independent*)
- bu durumda, "$a_1, a_2, \ldots, a_k$ vektörleri doğrusal bağımsızdır" denir
- şuna eşdeğerdir: hiçbir a_i diğerlerinin bir doğrusal bileşimi değildir
- örnek: birim n-vektörler $e_1, e_2, \ldots, e_n$ doğrusal bağımsızdır

Doğrusal bağımsızlık

doğrusal bağımsız vektörlerin doğrusal bileşimleri

- x'in doğrusal bağımsız $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vektörlerinin doğrusal bileşimi olduğunu farz edelim:

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k$$

- katsayılar $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ eşsizdir (*unique*), yani

$$x = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k$$

ise $\beta_i = \gamma_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$ için)

- bu, x verildiğinde katsayıların hesaplanabileceği anlamına gelir
- bu durum

$$(\beta_1 - \gamma_1)a_1 + (\beta_2 - \gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta_k - \gamma_k)a_k = 0$$

eşitliğinden ve dolayısıyla (doğrusal bağımsızlık sebebiyle) $\beta_1 - \gamma_1 = \beta_2 - \gamma_2 = \cdots = \beta_k - \gamma_k = 0$ olmasından anlaşılabilir

Bölüm 2

Taban

Bağımsızlık-boyut eşitsizliği

- n-vektörlerden oluşan bir doğrusal bağımsız küme en fazla n elemanlı olabilir
- diğer bir deyişle: n-vektörlerden oluşan, $n+1$ veya daha fazla elemanlı her küme doğrusal bağımlıdır

Taban

- n adet doğrusal bağımsız n-vektörden $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oluşan kümeye taban (*basis*) denir
- her n-vektör b, bu kümenin elemanlarının bir doğrusal bileşimi olarak ifade edilebilir:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$$

  (bazı $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ için)
- bu $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ katsayıları eşsizdir
- $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$ formülüne "b'nin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tabanında açılımı (*expansion*)" denir
- örnek: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tabanında b'nin açılımı

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \ldots + b_n e_n$$

Bölüm 3

Birim dikgen vektörler

Birim dikgen vektörler

- bir n-vektör kümesi $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $i \neq j$ için $a_i \perp a_j$ ise (karşılıklı) dikgendir
- $\|a_i\| = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, k$ için) ise vektörler düzgelenmiştir (*normalized*)
- vektörler hem dikgen hem de düzgelenmiş ise bu vektörlere birim dikgen (*orthonormal*) denir
- iç çarpım kullanılarak ifade edilebilir

$$a_i^T a_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

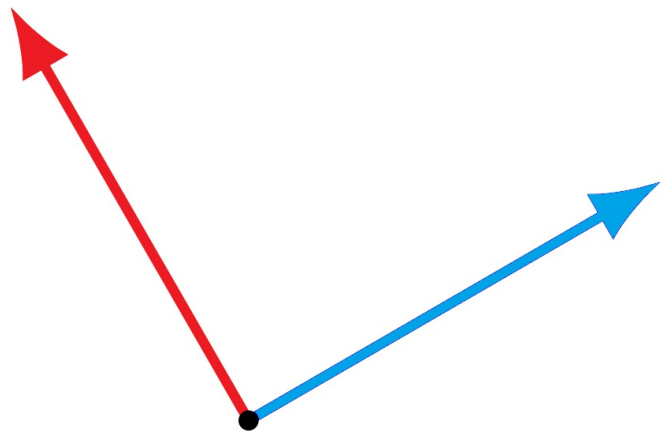
- birim dikgen vektörlerden oluşan kümeler doğrusal bağımsızdır
- bağımsızlık-boyut eşitsizliğinden dolayı $k \geq n$ olmak zorundadır
- $k = n$ olduğunda, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ bir birim dikgen tabandır

Birim dikgen tabanlara örnekler

- standart birim n-vektörler $e_1, e_2, \ldots, e_n$
- aşağıda verilen 3-vektörler

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- aşağıda gösterilen 2-vektörler



Birim dikgen açılım

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bir birim dikgen taban ise, herhangi bir n-vektör x için

$$x = (a_1^T x)a_1 + (a_2^T x)a_2 + \cdots + (a_n^T x)a_n$$

  ifadesi geçerlidir
- bu ifadeye "x'in birim dikgen açılımı" denir
- ifadeyi doğrulamak için her iki tarafın a_i ile iç çarpımı alınır

Bölüm 4

Gram-Schmidt algoritması

Gram-Schmidt (dikgenleştirme) algoritması

- $a_1, a_2, \ldots, a_k$'nin doğrusal bağımsız olup olmadığını sınamak için kullanılan bir algoritmadır
- ileride başka birçok farklı kullanım alanı olduğunu göreceğiz

Gram-Schmidt algoritması

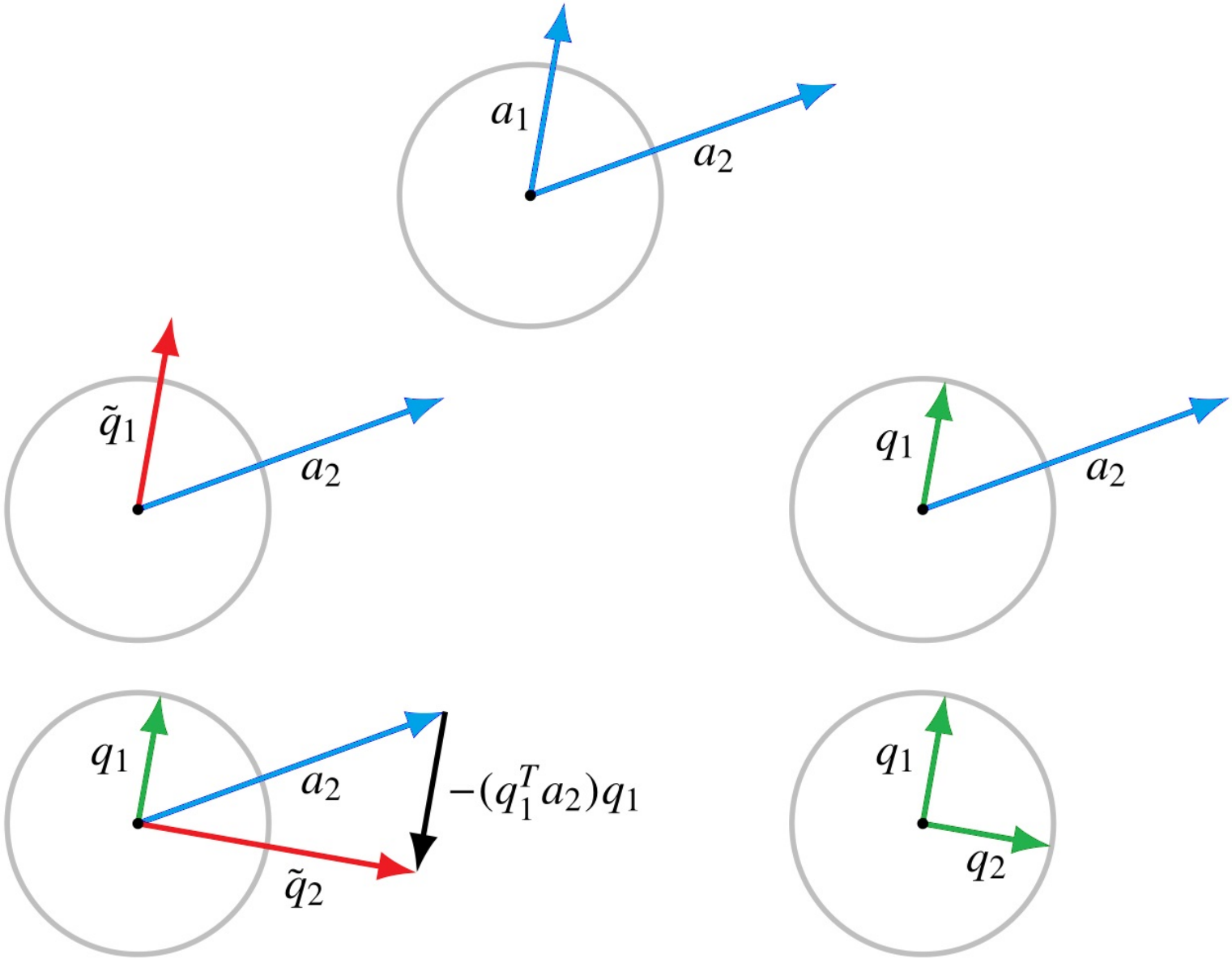
verilenler: $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$

tekrarla: $i = 1, 2, \ldots, k$ için

1) Dikgenleştirme: $\tilde{q}_i = a_i - (q_1^T a_i)q_1 - \cdots - (q_{i-1}^T a_i)q_{i-1}$
2) Doğrusal bağımlılık testi: $\tilde{q}_i = 0$ ise **dur**
3) Düzgeleme: $q_i = \tilde{q}_i / \|\tilde{q}_i\|$

- Gram-Schmidt algoritması erken durmazsa (2. adımda), $a_1, a_2, \ldots, a_k$ doğrusal bağımsızdır
- Gram-Schmidt algoritması $i = j$ yinelemesinde erken durursa, a_j $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$ vektörlerinin bir doğrusal bileşimidir (dolayısıyla, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ doğrusal bağımlıdır)

Gram-Schmidt algoritması - Örnek



Gram-Schmidt algoritması - Analiz (1/2)

tümevarım (*induction*) kullanarak $q_1, q_2, \ldots, q_i$'nin birim dikgen olduğunu gösterelim:

- $i-1$ için gerçek olduğunu varsayalım
- dikgenleştirme adımı

$$\tilde{q}_i \perp q_1, \ \ \ldots, \ \tilde{q}_i \perp q_{i-1}$$

  olmasını (yani, $\tilde{q}_i$'in $q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}$ vektörlerinin hepsine dikgen olmasını) garantiler
- bunu görmek için, her iki tarafın q_j $(j < i)$ ile iç çarpımını alalım

$$\begin{aligned} q_j^T \tilde{q}_i &= q_j^T a_i - (q_1^T a_i)(q_j^T q_1) - \cdots - (q_{i-1}^T a_i)(q_j^T q_{i-1}) \\ &= q_j^T a_i - q_j^T a_i = 0 \end{aligned}$$

- dolayısıyla $\tilde{q}_i \perp q_1, \ \ \ldots, \ \tilde{q}_i \perp q_{i-1}$ olur
- düzgeleme adımı $\|q_i\| = 1$ olmasını garantiler

Gram-Schmidt algoritması - Analiz (2/2)

algoritmanın yineleme i'den önce sonlanmadığını (*terminate*) varsayarak ilerlersek:

- a_i, $q_1, q_2, \ldots, q_i$'nin bir doğrusal bileşimidir:

$$a_i = \|\tilde{q}_i\| q_i + (q_1^T a_i) q_1 + \cdots + (q_{i-1}^T a_i) q_{i-1}$$

- q_i, $a_1, a_2, \ldots, a_i$'nin bir doğrusal bileşimidir: i üzerinde tümevarımla:

$$q_i = \frac{1}{\|\tilde{q}_i\|} \Big(a_i - (q_1^T a_i) q_1 - \cdots - (q_{i-1}^T a_i) q_{i-1} \Big)$$

ve (tümevarım varsayımından dolayı) $q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}$ vektörlerinden her biri $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$'in bir doğrusal bileşimidir

Erken sonlanma

algoritmanın j. adımda sonlandığını farz edelim

- a_j, $q_1, q_2, \ldots, q_{j-1}$'nun bir doğrusal bileşimidir

$$a_j = (q_1^T a_j) q_1 + \cdots + (q_{j-1}^T a_j) q_{j-1}$$

- $q_1, q_2, \ldots, q_{j-1}$ vektörlerinden her biri $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$'nın bir doğrusal bileşimidir
- dolayısıyla a_j, $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$'nın bir doğrusal bileşimidir

Gram-Schmidt algoritmasının karmaşıklığı

- i. yinelemenin 1. adımı için $i-1$ adet iç çarpım gerekir

$$q_1^T a_i, \ \ \ldots, \ q_{i-1}^T a_i$$

  bunun toplam maliyeti $(i-1)(2n-1)$ floptur
- $\tilde{q}_i$'yi hesaplamak: $2n(i-1)$ flop
- $\|\tilde{q}_i\|$ ve q_i'yi hesaplamak: $3n$ flop
- toplam maliyet:

$$\sum_{i=1}^{k} ((4n-1)(i-1)+3n) = (4n-1)\frac{k(k-1)}{2} + 3nk \approx 2nk^2$$

  ($\sum_{i=1}^{k}(i-1) = k(k-1)/2$ kullanılarak)