Dinamik Sistemler

T.C. Trakya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kontrol Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Işık İlber Sırmatel
sirmatel.github.io

Kaynak (source)

Lecture Slides for Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares.
Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe

Konu listesi

Bölüm 1

Tanım ve notasyon

Durum ve durum dizisi

- durum dizisi (*state sequence*): n-vektörlerden $(x_1, x_2, \ldots)$ oluşan dizi
- t zaman veya periyot belirtir
- x_t'ye t anındaki durum (*state*) denir; diziye durum yörüngesi (*state trajectory*) de denir
- t'nin şu anki (*current*) zaman olduğu varsayılırsa:
  - x_t şu anki (t anındaki) durum
  - x_{t-1} önceki ($t-1$ anındaki) durum
  - x_{t+1} sonraki ($t+1$ anındaki) durum

Durum ve durum dizisi

- örnekler: durum $x_t \in \mathbb{R}^n$ aşağıdakileri temsil edebilir:
  - bir nüfusta yaş dağılımı
  - farklı sektörlerdeki ekonomik çıktılar
  - mekanik sistemlerde hız ve konum
  - elektrik sistemlerde akım ve gerilim
  - hidrolik sistemlerde su seviyesi
  - termik sistemlerde sıcaklık

Doğrusal dinamikler

- doğrusal dinamik sistem modeli:

$$x_{t+1} = A_t x_t, \quad t = 1, 2, \ldots$$

- $n \times n$ A_t matrisine dinamik matrisi (veya durum matrisi) denir
- $(A_t)_{ij}(x_t)_j$, $(x_t)_j$'den $(x_{t+1})_i$'ye yapılan katkı
- A_t zamana bağımlı değilse (yani, $A_t = A$ ise) sisteme zamanla değişmeyen (*time-invariant*) sistem denir
- yineleme $x_{t+1} = A_t x_t$ kullanılarak x_t'nin zaman içinde gelişiminin benzetimi (*simulation*) oluşturulabilir:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_0 x_0 \\ x_2 &= A_1 x_1 \\ x_3 &= A_2 x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Doğrusal dinamik sistem çeşitleri

- girişli doğrusal dinamik sistem modeli:

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + c_t, \quad t = 1, 2, \ldots$$

  - m-vektör u_t giriş vektörü
  - $n \times m$ matris B_t giriş matrisi
  - c_t kayma (*offset*) terimi

- özbağlanımlı (*auto-regressive*) model:

$$x_{t+1} = A_1 x_t + A_2 x_{t-1} + \cdots + A_K x_{t-K+1}, \quad t = K, K+1, \ldots$$

  - sonraki durum x_{t+1}, şu anki durum x_t ve $K-1$ adet önceki duruma bağlıdır
  - $K = 1$ için bu model standart doğrusal dinamik sistem modelidir: $x_{t+1} = Ax_t$

Durum uzayı modeli (ek bilgi)

$$x_{t+1} = A_t x_t, \quad t = 1, 2, \ldots$$

veya

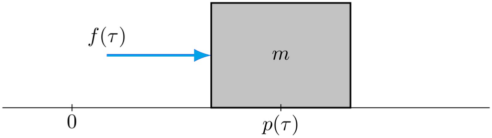
$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t, \quad t = 1, 2, \ldots$$

formundaki modellere (genel olarak, bir sistemin durumu x_t'nin dinamiklerini ifade eden modellere) otomatik kontrolde (ve dinamik sistemlerle ilgili diğer alanlarda, örneğin: kimyasal süreç sistemleri, finans, ekonomi, ekonometri, işaret/görüntü işleme, ...) durum uzayı modeli (*state space model*) denir

Bölüm 2

Örnek: Bir cismin hareketi

Bir cismin hareketi



- $f(\tau)$ kuvveti etkisinde (τ zaman) bir doğru üzerinde hareket eden m kütleli cismi ele alalım (konumu $p(\tau)$)
- Newton hareket yasalarıyla konumun dinamik modeli

$$m\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}\tau^2}(\tau) = -\eta\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}(\tau) + f(\tau)$$

  formundaki diferansiyel denklem olarak kurulabilir (burada $\eta > 0$ sürüklenme (*drag*) katsayısı)
- cismin hızına $v(\tau)$ dersek ($v(\tau) = \frac{\mathrm{d}p(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$) bu bir bağlaşık (*coupled*) diferansiyel denklem takımı olarak yazılabilir:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = v(\tau), \qquad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = -\eta v(\tau) + f(\tau)$$

Zamanda ayrıklaştırma

- diferansiyel denklem takımından $x_{t+1} = Ax_t$ formundaki doğrusal dinamik sistem modeline geçmek için diferansiyel denklemleri zamanda ayrıklaştırmamız gerekir (*time discretization*)
- bunun için bir örnekleme aralığı (*sampling interval*) $h > 0$ tanımlayalım
- h, hızın ve kuvvetlerin h süresi boyunca çok fazla değişmeyeceği kadar küçük seçilmelidir

Zamanda ayrıklaştırma

- $p(\tau)$, $v(\tau)$ ve $f(\tau)$'yi zamanda örneklenmiş (*sampled*) ($\tau = th$, $t = 1, 2, \ldots$) olarak yazalım:

$$p_t = p(th), \qquad v_t = v(th), \qquad f_t = f(th)$$

- küçük h için türev içeren terimler yaklaşık olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}(th) \approx \frac{p_{t+1} - p_t}{h}, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}(th) \approx \frac{v_{t+1} - v_t}{h}$$

- buradan diferansiyel denklem takımının ayrık zamanlı halini (yani, fark denklemi (*difference equation*)) şu şekilde elde ederiz:

$$\frac{p_{t+1} - p_t}{h} = v_t, \qquad m\frac{v_{t+1} - v_t}{h} = f_t - \eta v_t$$

Ayrık-zamanlı dinamik sistem modeli

- sistemin durumunu şu şekilde tanımlayalım:

$$x_t = \begin{bmatrix} p_t \\ v_t \end{bmatrix}$$

- buradan ayrık-zamanlı diferansiyel denklem takımı

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 - \frac{h\eta}{m} \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h}{m} \end{bmatrix} f_t, \qquad t = 1, 2, \ldots$$

  formunda yazılabilir. bu, girişi f_t ve dinamik matrisi ile giriş matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 - \frac{h\eta}{m} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h}{m} \end{bmatrix}$$

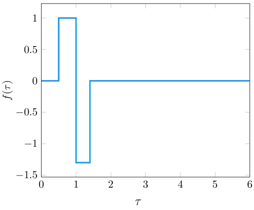
  şeklinde olan bir doğrusal dinamik sistem modelidir

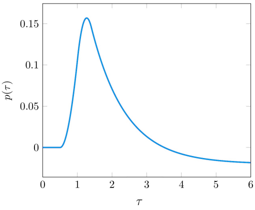
Cismin hareketinin benzetimi

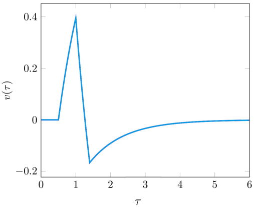
örnek: parametreleri $m = 1$ kg, $\eta = 1$ N s/m ve $h = 0.01$ s olan ayrık-zamanlı doğrusal dinamik sistem modelini ele alalım.

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 \text{ N} & 0 \leq \tau < 0.5 \\ 1 \text{ N} & 0.5 \leq \tau < 1 \\ -1.3 \text{ N} & 1 \leq \tau < 1.4 \\ 0 \text{ N} & 1.4 \leq \tau \end{cases}$$

ile verilen giriş yörüngesi için sistemin durum yörüngeleri aşağıdaki şekilde oluşur.







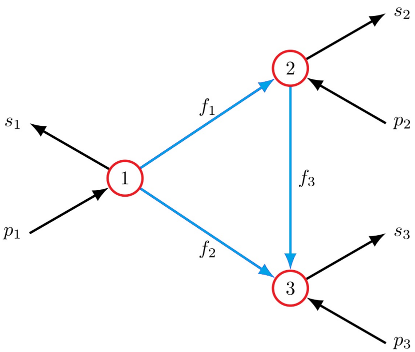
Bölüm 3

Örnek: Tedarik zinciri dinamikleri

Tedarik zinciri dinamikleri

- bir tedarik zincirinin (*supply chain*) dinamikleri bir doğrusal dinamik sistem modeli ile modellenebilir
- burada basit bir örneği inceleyeceğiz (gerçek bir tedarik zincirinde depolama kapasitesi limitleri veya talep dalgalanmaları gibi unsurlar mevcuttur)

Tedarik zinciri dinamikleri



- bölünebilir (*divisible*) (yani, miktarı bir reel sayı ile ifade edilebilir) bir malın tedarik zincirini ele alalım. zincirde $n = 3$ adet depo ve $m = 3$ adet nakliye bağlantısı olsun
- bu depoların her biri için bir mal miktarı hedefi mevcuttur. n-vektör x_t ile bu hedeften olan sapmaları ifade edelim (örneğin, $(x_5)_3$ 5. periyot için 3. depodaki mal miktarı ile hedef arasındaki fark)

Tedarik zinciri dinamikleri

- her periyot t boyunca, zincirde mevcut m adet nakliye bağlantısı üzerinden mallar depolar arasında taşınabilir
- ayrıca, depolara mal girişi (satınalma (*purchase*) yoluyla) ve depolardan mal çıkışı (satış (*sale*) yoluyla) mümkündür. satınalmaları ve satışları n-vektörler p_t ve s_t ile gösterelim
- zincirin bağlantıları (ayrıtlar) $n \times m$ çakışım matrisi A^{sc} ile ifade edilir:

$$A^{\mathsf{sc}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- periyot t'deki mal akışını m-vektör f_t ile gösterelim (örneğin, $(f_6)_2 = -1.4$ periyot 6'da 1.4 birim malın ayrıt 2 boyunca ayrıtla ters yönde taşındığı anlamına gelir)
- n-vektör $A^{\mathsf{sc}} f_t$ n adet depoya olan net mal akışlarını verir

Tedarik zinciri dinamikleri

- depolar (düğümler) arasında nakliye bağlantıları (ayrıtlar) üzerinden gerçekleşen mal akışları ile satınalma ve satışları hesaba katarak zincirin dinamiklerini elde ederiz ($A = I$):

$$x_{t+1} = Ax_t + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} A^{\mathsf{sc}} & I \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} f_t \\ p_t \end{bmatrix} - s_t, \quad t = 1, 2, \ldots$$

- tedarik zinciri kontrolü uygulamalarında satış s_t zincir yöneticisinin kontrolü dışındadır, ancak mal akışı f_t ile satınalma p_t belirlenebilir. dolayısıyla bu model, kayma (*offset*) terimi s_t ve girişi

$$\begin{bmatrix} f_t \\ p_t \end{bmatrix}$$

olan, girişli bir doğrusal dinamik sistem modelidir

Bölüm 4

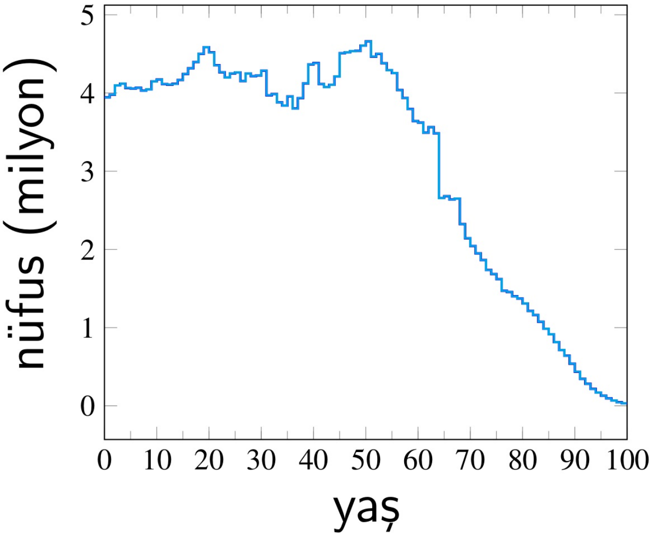
Örnek: Nüfus dinamikleri

Nüfus dağılımı

- $x_t \in \mathbb{R}^{100}$ t yılı $(t = 1, 2, \ldots, T)$ için nüfus yaş dağılımını verir
- $(x_t)_i$ t yılında $i - 1$ yaşında olan insanların sayısı
- t yılındaki toplam nüfus $\mathbf{1}^T x_t$
- 70 yaşında veya daha yaşlı olan insanların sayısı:

$$\begin{bmatrix} 0_{70} \\ \mathbf{1}_{30} \end{bmatrix}^T x_t$$

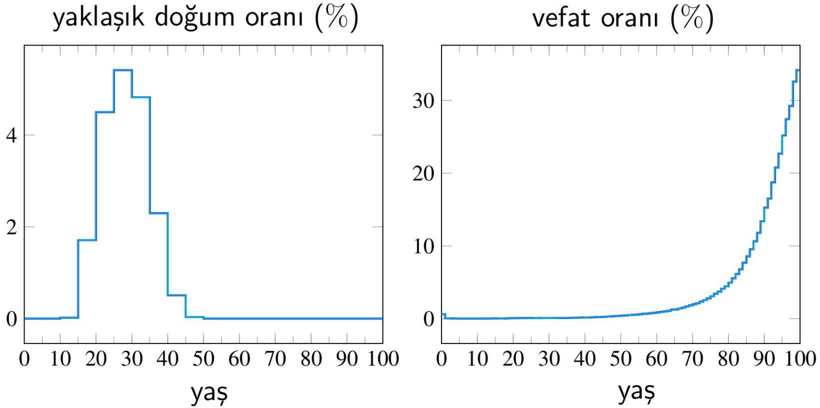
ABD’nin nüfus dağılımı (2010 sayımı)



Doğum ve vefat oranları

- doğum oranı $b \in \mathbb{R}^{100}$, vefat oranı $d \in \mathbb{R}^{100}$
- $i - 1$ yaşında kişi başına doğum sayısı: b_i
- $i - 1$ yaşında kişilerin vefat oranı: d_i ($d_{100} = 1$ varsayıyoruz)
- b ve d zamana göre değişebilir ancak burada sabit olduklarını varsayıyoruz

ABD'de doğum ve vefat oranları



Nüfus dinamikleri

- gelecek yıl için nüfus dağılımının hesaplanmasını ele alalım
- gelecek yıl için 0 yaşındakilerin sayısı, bu yıl gerçekleşen toplam doğuma eşittir:

$$(x_{t+1})_1 = b^T x_t$$

- gelecek yıl için i yaşındakilerin sayısı, bu yıl için $i-1$ yaşındakilerin sayısından vefat edenler çıkarılarak bulunur

$$(x_{t+1})_{i+1} = (1-d_i)(x_t)_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 99$$

- sonuç olarak nüfus dinamikleri $x_{t+1} = Ax_t$ olarak elde edilir. burada A şu şekildedir:

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{99} & b_{100} \\ 1-d_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1-d_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1-d_{99} & 0 \end{bmatrix}$$

Bölüm 5

Örnek: Salgın dinamikleri

Salgın dinamikleri

- 4-vektör x_t dört farklı enfeksiyon halinde bulunan nüfus oranlarını verir:
  - duyarlı (*susceptible*) (hastalanabilir)
  - enfekte (*infected*) (hasta)
  - iyileşmiş (*recovered*) (bağışık)
  - kayıp (*deceased*) (vefat etmiş)
- bu modele bazen SIR modeli denir
- örnek:

$$x_t = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Salgın dinamikleri

her gün

- duyarlı nüfustan
  - $\%5$'i hastalanıyor
  - $\%95$'i duyarlı halde kalıyor
- enfekte nüfustan
  - $\%1$'i vefat ediyor
  - $\%10$'u bağışıklık kazanarak iyileşiyor
  - $\%4$'ü bağışıklık kazanmadan iyileşiyor (yani, duyarlı hale geliyor)
  - $\%85$'i enfekte halde kalıyor

bağışık nüfusta hal değişikliği olmuyor.

bu parametreler için salgın dinamikleri şu şekildedir:

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_t$$

Salgın dinamikleri - Benzetim