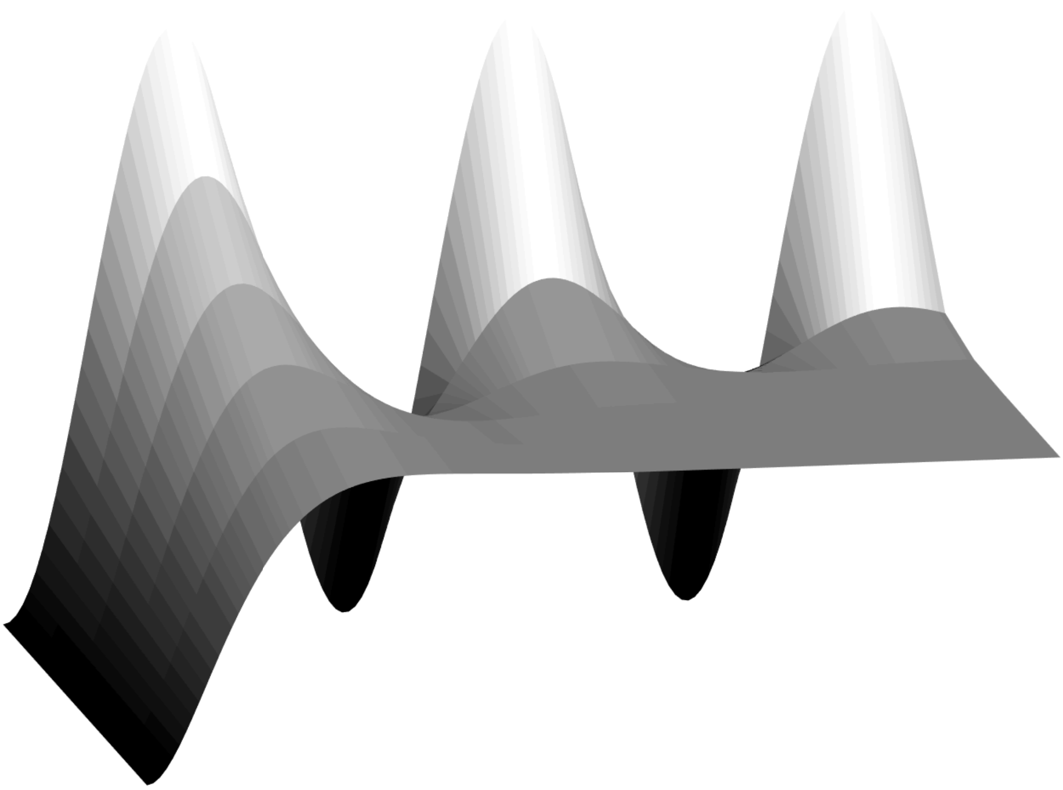
Otomatik Kontrol Sistemleri Çözümlü Sorular

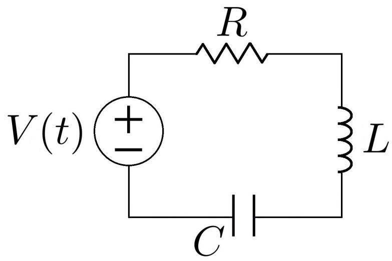
T.C. Trakya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kontrol Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Işık İlber Sırmatel



Soru 1 *RLC devresi (gerilim kaynaklı)*

Aşağıda, parametreleri sırasıyla R, L ve C olan direnç, endüktör ve kapasitör elemanlarından oluşan bir RLC devresinin şeması verilmiştir.



Şemadaki $V(t)$ ideal bir gerilim kaynağı ile devreye sağlanan gerilimi belirtmektedir (not: ideal gerilim kaynağının devreye sağladığı gerilim, kaynaktan geçen akımdan bağımsızdır). Kapasitörün üzerindeki yükü ve gerilim düşüşünü sırasıyla $Q(t)$ ve $V_C(t)$ olarak, devrede dolaşan akımı ise $I(t)$ olarak isimlendirelim. Bütün başlangıç koşulları 0 kabul edilsin. Verilenlere göre RLC devresinin

a) dinamik denklemini, bağımlı değişkeni $Q(t)$ ve zorlama fonksiyonu $V(t)$ olan bir tek değişkenli diferansiyel denklem olarak yazınız.

b) sağlanan gerilim $V(t)$'den kapasitörün üzerindeki yük $Q(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu bulunuz.

c) doğrusal durum uzayı modelini birinci durum $Q(t)$, ikinci durum $I(t)$, giriş $V(t)$, ve çıkış $V_C(t)$ tanımlarına göre bulunuz.

Çözüm a)

Direncin ve endüktörün üzerindeki gerilim düşüşlerini sırasıyla $V_R(t)$ ve $V_L(t)$ olarak isimlendirelim. Ohm yasasından $V_R(t) = RI(t)$, Faraday yasasından $V_L(t) = L\dot{I}(t)$, ideal kapasitör modelinden ise $V_C(t) = Q(t)/C$ yazabiliriz. Devre için Kirchhoff'un gerilim yasasından

$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = RI(t) + L\dot{I}(t) + \frac{1}{C}Q(t)$$

yazabiliriz. Kirchhoff'un akım yasasından $I(t) = \dot{Q}(t)$ yazarak bu denklemi tekrar yazarsak sorunun cevabı

$$R\dot{Q}(t) + L\ddot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = V(t)$$

veya ($\ddot{Q}(t)$ teriminin katsayısını 1 yapıp terimleri sıralı yazmak istersek)

$$\boxed{\ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{1}{LC}Q(t) = \frac{1}{L}V(t)}$$

şeklinde bulunur. $\square$

Çözüm b)

Çözüm a) ile bulunan

$$\ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{1}{LC}Q(t) = \frac{1}{L}V(t)$$

şeklindeki dinamik denklemdeki değişkenlerin Laplace dönüşümlerini alırsak (not: soruda "bütün başlangıç koşullarını 0 kabul edin" denmiş)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{V(t)\} &= V(s) \\
\mathcal{L}\{Q(t)\} &= Q(s) \\
\mathcal{L}\{\dot{Q}(t)\} &= sQ(s) - \cancelto{0}{Q(0)} = sQ(s) \\
\mathcal{L}\{\ddot{Q}(t)\} &= s^2Q(s) - s\cancelto{0}{Q(0)} - \cancelto{0}{\dot{Q}(0)} = s^2Q(s)
\end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Bunlarla dinamik denklemi tekrar yazarsak

$$s^2Q(s) + \frac{R}{L}sQ(s) + \frac{1}{LC}Q(s) = \frac{1}{L}V(s)$$

denklemini elde ederiz. Burada sol tarafı $Q(s)$ parantezine alarak

$$Q(s)\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right) = \frac{1}{L}V(s)$$

yazabiliriz. Buradan da sorunun cevabı

$$\frac{Q(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

veya (daha sade şekilde yazmak istersek)

$$\boxed{\frac{Q(s)}{V(s)} = \frac{1}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm c)

Çözüm a)'da bulunan

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \dot{Q}(t) \quad \text{(Kirchhoff'un akım yasası)} \\
V(t) &= RI(t) + L\dot{I}(t) + \frac{1}{C}Q(t) \quad \text{(Kirchhoff'un gerilim yasası)}
\end{aligned}
$$

şeklindeki dinamik denklemleri, soruda verilen

$$
x_1(t) \triangleq Q(t) \quad x_2(t) \triangleq I(t) \quad u(t) \triangleq V(t)
$$

tanımlarıyla (iki adet birinci derece diferansiyel denklem olarak) yeniden yazarsak

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \quad \text{(Kirchhoff'un akım yasası)} \\
u(t) &= Rx_2(t) + L\dot{x}_2(t) + \frac{1}{C}x_1(t) \quad \text{(Kirchhoff'un gerilim yasası)}
\end{aligned}
$$

denklemlerini elde ederiz. Bunları durumların türevleri yalnız kalacak şekilde düzenlersek

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t)
\end{aligned}
$$

denklemlerini elde ederiz. Ayrıca soruda verilen çıkış tanımına ($y(t) \triangleq V_C(t) = \frac{1}{C}Q(t)$) göre çıkış denklemini

$$
y(t) = \frac{1}{C}x_1(t)
$$

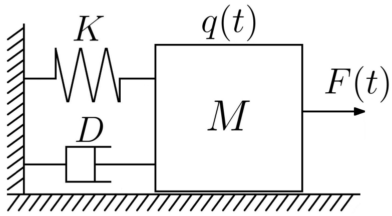
şeklinde yazabiliriz. Bulunan bu denklemleri doğrusal durum uzayı modeli formunda yazarsak sorunun cevabı

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\
y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)}
\end{aligned}
}
$$

şeklinde bulunur. □

Soru 2 *Kütle-yay-damper sistemi (öteleme hareketi)*

Aşağıda tek eksenli öteleme hareketi yapan bir mekanik sistemin şeması verilmiştir.



Sistem kütlesi M olan bir cisim ile cismi sabit bir zemine bağlayan bir yay (yay sabiti K) ve bir damper (sönüm sabiti D) elemanından oluşmaktadır. Zemin sürtünmesizdir. Cismin yer değiştirmesini $q(t)$ ve sisteme etkiyen kuvveti $F(t)$ olarak isimlendirelim. Bütün başlangıç koşulları 0 kabul edilsin. Verilenlere göre sistemin

a) dinamik denklemini, bağımlı değişkeni $q(t)$ ve zorlama fonksiyonu $F(t)$ olan bir tek değişkenli diferansiyel denklem olarak yazınız.

b) etkiyen kuvvet $F(t)$'den cismin yer değiştirmesi $q(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu bulunuz.

c) doğrusal durum uzayı modelini birinci durum $q(t)$, ikinci durum $\dot{q}(t)$, giriş $F(t)$, ve çıkış $q(t)$ tanımlarına göre bulunuz.

Çözüm a)

Cisim için Newton'un ikinci yasasını (öteleme hareketi için) yazarsak sorunun cevabı

$$M\ddot{q}(t) = -Kq(t) - D\dot{q}(t) + F(t)$$

veya ($\ddot{q}(t)$ teriminin katsayısını 1 yapıp terimleri sıralı yazmak istersek)

$$\boxed{\ddot{q}(t) + \frac{D}{M}\dot{q}(t) + \frac{K}{M}q(t) = \frac{1}{M}F(t)}$$

şeklinde bulunur. $\square$

Çözüm b)

Çözüm a) ile bulunan

$$\ddot{q}(t) + \frac{D}{M}\dot{q}(t) + \frac{K}{M}q(t) = \frac{1}{M}F(t)$$

şeklindeki dinamik denklemdeki değişkenlerin Laplace dönüşümlerini alırsak (not: soruda "bütün başlangıç koşullarını 0 kabul edin" denmiş)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(t)\} &= F(s) \\
\mathcal{L}\{q(t)\} &= Q(s) \\
\mathcal{L}\{\dot{q}(t)\} &= sQ(s) - \cancelto{0}{q(0)} = sQ(s) \\
\mathcal{L}\{\ddot{q}(t)\} &= s^2Q(s) - s\cancelto{0}{q(0)} - \cancelto{0}{\dot{q}(0)} = s^2Q(s)
\end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Bunlarla dinamik denklemi tekrar yazarsak

$$s^2Q(s) + \frac{D}{M}sQ(s) + \frac{K}{M}Q(s) = \frac{1}{M}F(s)$$

denklemini elde ederiz. Burada sol tarafı $Q(s)$ parantezine alarak

$$Q(s)\left(s^2 + \frac{D}{M}s + \frac{K}{M}\right) = \frac{1}{M}F(s)$$

yazabiliriz. Buradan da sorunun cevabı

$$\frac{Q(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{D}{M}s + \frac{K}{M}}$$

veya (daha sade şekilde yazmak istersek)

$$\boxed{\frac{Q(s)}{V(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K}}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm c)

Çözüm a)'da bulunan

$$M\ddot{q}(t) = -Kq(t) - D\dot{q}(t) + F(t)$$

şeklindeki dinamik denklemi, soruda verilen

$$x_1(t) \triangleq q(t) \quad x_2(t) \triangleq \dot{q}(t) \quad u(t) \triangleq F(t)$$

tanımlarıyla (iki adet birinci derece diferansiyel denklem olarak) yeniden yazarsak

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \quad (\dot{q}\text{'nun tanımından}) \\ M\dot{x}_2(t) &= -Kx_1(t) - Dx_2(t) + u(t) \quad (\text{Newton'un ikinci yasası}) \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Bunları durumların türevleri yalnız kalacak şekilde düzenlersek

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{D}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t) \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Ayrıca soruda verilen çıkış tanımına ($y(t) \triangleq q(t)$) göre çıkış denklemini

$$y(t) = x_1(t)$$

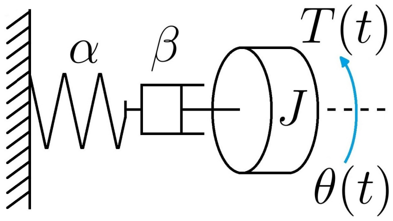
şeklinde yazabiliriz. Bulunan bu denklemleri doğrusal durum uzayı modeli formunda yazarsak sorunun cevabı

$$\boxed{\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \end{aligned}}$$

şeklinde bulunur. □

Soru 3 *Kütle-yay-damper sistemi (dönme hareketi)*

Aşağıda tek eksenli dönme hareketi yapan bir mekanik sistemin şeması verilmiştir.



Sistem eylemsizlik momenti J olan bir cisim ile cismi sabit bir zemine bağlayan bir yay (yay sabiti α) ve bir damper (sönüm sabiti β) elemanından oluşmaktadır. Cismin açısal yerdeğiştirmesini $\theta(t)$ ve sisteme etkiyen torku $T(t)$ olarak isimlendirelim. Bütün başlangıç koşulları 0 kabul edilsin. Verilenlere göre sistemin

a) dinamik denklemini, bağımlı değişkeni $\theta(t)$ ve zorlama fonksiyonu $T(t)$ olan bir tek değişkenli diferansiyel denklem olarak yazınız.

b) etkiyen tork $T(t)$'den cismin açısal yerdeğiştirmesi $\theta(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu bulunuz.

c) doğrusal durum uzayı modelini birinci durum $\theta(t)$, ikinci durum $\dot{\theta}(t)$, giriş $T(t)$, ve çıkış $\theta(t)$ tanımlarına göre bulunuz.

Çözüm a)

Cisim için Newton'un ikinci yasasını (dönme hareketi için) yazarsak sorunun cevabı

$$J\ddot{\theta}(t) = -\alpha\theta(t) - \beta\dot{\theta}(t) + T(t)$$

veya ($\ddot{\theta}(t)$ teriminin katsayısını 1 yapıp terimleri sıralı yazmak istersek)

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) + \frac{\beta}{J}\dot{\theta}(t) + \frac{\alpha}{J}\theta(t) = \frac{1}{J}T(t)}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm b)

Çözüm a) ile bulunan

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{\beta}{J}\dot{\theta}(t) + \frac{\alpha}{J}\theta(t) = \frac{1}{J}T(t)$$

şeklindeki dinamik denklemdeki değişkenlerin Laplace dönüşümlerini alırsak (not: soruda "bütün başlangıç koşullarını 0 kabul edin" denmiş)

$$\mathcal{L}\{T(t)\} = T(s)$$
$$\mathcal{L}\{\theta(t)\} = \Theta(s)$$
$$\mathcal{L}\{\dot{\theta}(t)\} = s\Theta(s) - \cancelto{0}{\theta(0)} = s\Theta(s)$$
$$\mathcal{L}\{\ddot{\theta}(t)\} = s^2\Theta(s) - s\cancelto{0}{\theta(0)} - \cancelto{0}{\dot{\theta}(0)} = s^2\Theta(s)$$

ifadelerini elde ederiz. Bunlarla dinamik denklemi tekrar yazarsak

$$s^2\Theta(s) + \frac{\beta}{J}s\Theta(s) + \frac{\alpha}{J}\Theta(s) = \frac{1}{J}T(s)$$

denklemini elde ederiz. Burada sol tarafı $\Theta(s)$ parantezine alarak

$$\Theta(s)\left(s^2 + \frac{\beta}{J}s + \frac{\alpha}{J}\right) = \frac{1}{J}T(s)$$

yazabiliriz. Buradan da sorunun cevabı

$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{\frac{1}{J}}{s^2 + \frac{\beta}{J}s + \frac{\alpha}{J}}$$

veya (daha sade şekilde yazmak istersek)

$$\boxed{\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + \beta s + \alpha}}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm c)

Çözüm a)'da bulunan

$$J\ddot{\theta}(t) = -\alpha\theta(t) - \beta\dot{\theta}(t) + T(t)$$

şeklindeki dinamik denklemi, soruda verilen

$$x_1(t) \triangleq \theta(t) \quad x_2(t) \triangleq \dot{\theta}(t) \quad u(t) \triangleq T(t)$$

tanımlarıyla (iki adet birinci derece diferansiyel denklem olarak) yeniden yazarsak

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \quad (\dot{\theta}\text{'nın tanımından}) \\ J\dot{x}_2(t) &= -\alpha x_1(t) - \beta x_2(t) + u(t) \quad \text{(Newton'un ikinci yasası)} \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Bunları durumların türevleri yalnız kalacak şekilde düzenlersek

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{\alpha}{J}x_1(t) - \frac{\beta}{J}x_2(t) + \frac{1}{J}u(t) \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Ayrıca soruda verilen çıkış tanımına ($y(t) \triangleq \theta(t)$) göre çıkış denklemini

$$y(t) = x_1(t)$$

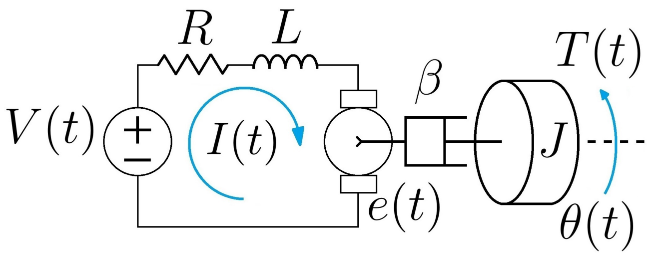
şeklinde yazabiliriz. Bulunan bu denklemleri doğrusal durum uzayı modeli formunda yazarsak sorunun cevabı

$$\boxed{\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\alpha}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \end{aligned}}$$

şeklinde bulunur. □

Soru 4 *Doğru akım motoru*

Aşağıda armatür kontrollü bir doğru akım motorunun şeması verilmiştir.



Motorun elektrik kısmı parametreleri sırasıyla R ve L olan direnç ve endüktör elemanlarıyla, mekanik kısmı ise eylemsizlik momenti J olan bir rotor (yani, sadece kendi ekseni etrafında dönme hareketi yapan kısım) ve sönüm sabiti β olan bir damper elemanıyla modellenmiştir. Armatürden motora uygulanan gerilimi $V(t)$, dolaşan akımı $I(t)$, oluşan zıt elektromotor kuvveti (EMK) $e(t)$, oluşan torku $T(t)$, rotorun açısal yerdeğiştirmesini $\theta(t)$, ve rotorun açısal hızını $\omega(t)$ ($\omega(t) \triangleq \dot{\theta}(t)$) olarak isimlendirelim. Akım ile tork arasındaki bağıntı $T = KI(t)$, zıt EMK ile açısal hız arasındaki bağıntı ise $e(t) = K\omega(t)$ olarak verilsin (K motor sabiti parametresi). Bütün başlangıç koşulları 0 kabul edilsin. Verilenlere göre doğru akım motorunun

a) dinamik denklemini, bağımlı değişkeni $\theta(t)$ ve zorlama fonksiyonu $V(t)$ olan bir tek değişkenli diferansiyel denklem şeklinde yazınız.

b) uygulanan gerilim $V(t)$'den açısal yerdeğiştirme $\theta(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu bulunuz.

c) uygulanan gerilim $V(t)$'den açısal hız $\omega(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu bulunuz.

d) doğrusal durum uzayı modelini birinci durum $\theta(t)$, ikinci durum $\omega(t)$, üçüncü durum $I(t)$, giriş $V(t)$, ve çıkış $\theta(t)$ tanımlarına göre bulunuz.

e) doğrusal durum uzayı modelini birinci durum $\omega(t)$, ikinci durum $I(t)$, giriş $V(t)$, ve çıkış $\omega(t)$ tanımlarına göre bulunuz.

Çözüm a)

Elektrik kısım için Kirchhoff'un gerilim yasasından

$$V(t) = RI(t) + L\dot{I}(t) + e(t)$$

ve mekanik kısım için Newton'un ikinci yasasından

$$J\dot{\omega}(t) = -\beta\omega(t) + T(t)$$

yazabiliriz. Açısal hız tanımı ($\omega(t) \triangleq \dot{\theta}(t)$, $\dot{\omega}(t) \triangleq \ddot{\theta}(t)$), akım-tork bağıntısı, ve zıt EMK-açısal hız bağıntısını hesaba katarak denklemleri

$$\begin{aligned} V(t) &= RI(t) + L\dot{I}(t) + K\dot{\theta}(t) \quad \text{(birinci denklem)} \\ J\ddot{\theta}(t) &= -\beta\dot{\theta}(t) + KI(t) \quad \text{(ikinci denklem)} \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Zorlama fonksiyonu $V(t)$'yi içeren denklemi (birinci denklem), sadece soruda istenen diferansiyel denklemin değişkeni $\theta(t)$'yı içeren terimlerle yazmak için ikinci denklemi kullanarak $I(t)$ ve $\dot{I}(t)$ ifadelerini

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{J}{K}\ddot{\theta}(t) + \frac{\beta}{K}\dot{\theta}(t) \quad \text{(ikinci denklemde } I(t)\text{'yı yalnız bıraktık)} \\ \dot{I}(t) &= \frac{J}{K}\dddot{\theta}(t) + \frac{\beta}{K}\ddot{\theta}(t) \quad \text{(üstteki I(t) ifadesinin türevini aldık)} \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadeleri birinci denklemde yerine yazarsak sorunun cevabı

$$V(t) = R\underbrace{\left(\frac{J}{K}\ddot{\theta}(t) + \frac{\beta}{K}\dot{\theta}(t)\right)}_{I(t)} + L\underbrace{\left(\frac{J}{K}\dddot{\theta}(t) + \frac{\beta}{K}\ddot{\theta}(t)\right)}_{\dot{I}(t)} + K\dot{\theta}(t)$$

veya ($\dddot{\theta}(t)$ teriminin katsayısını 1 yapmak ve diğer terimleri tek katsayıda toplanmış şekilde yazmak istersek)

$$\boxed{\dddot{\theta}(t) + \frac{RJ + L\beta}{LJ}\ddot{\theta}(t) + \frac{R\beta + K^2}{LJ}\dot{\theta}(t) = \frac{K}{LJ}V(t)}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm b)

Çözüm a) ile bulunan

$$\dddot{\theta}(t) + \frac{RJ + L\beta}{LJ}\ddot{\theta}(t) + \frac{R\beta + K^2}{LJ}\dot{\theta}(t) = \frac{K}{LJ}V(t)$$

şeklindeki dinamik denklemdeki değişkenlerin Laplace dönüşümlerini alırsak (not: soruda "bütün başlangıç koşullarını 0 kabul edin" denmiş)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{V(t)\} &= V(s) \\
\mathcal{L}\{\theta(t)\} &= \Theta(s) \\
\mathcal{L}\{\dot{\theta}(t)\} &= s\Theta(s) - \cancelto{0}{\theta(0)} = s\Theta(s) \\
\mathcal{L}\{\ddot{\theta}(t)\} &= s^2\Theta(s) - s\cancelto{0}{\theta(0)} - \cancelto{0}{\dot{\theta}(0)} = s^2\Theta(s) \\
\mathcal{L}\{\dddot{\theta}(t)\} &= s^3\Theta(s) - s^2\cancelto{0}{\theta(0)} - s\cancelto{0}{\dot{\theta}(0)} - \cancelto{0}{\ddot{\theta}(0)} = s^3\Theta(s)
\end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Bunlarla dinamik denklemi tekrar yazarsak

$$s^3\Theta(s) + \frac{RJ + L\beta}{LJ}s^2\Theta(s) + \frac{R\beta + K^2}{LJ}s\Theta(s) = \frac{K}{LJ}V(s)$$

denklemini elde ederiz. Burada sol tarafı $\Theta(s)$ parantezine alarak

$$\Theta(s)\left(s^3 + \frac{RJ + L\beta}{LJ}s^2 + \frac{R\beta + K^2}{LJ}s\right) = \frac{K}{LJ}V(s)$$

yazabiliriz. Buradan da sorunun cevabı

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{\frac{K}{LJ}}{s^3 + \frac{RJ+L\beta}{LJ}s^2 + \frac{R\beta+K^2}{LJ}s}$$

veya (daha sade şekilde yazmak istersek)

$$\boxed{\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{LJs^3 + (RJ + L\beta)s^2 + (R\beta + K^2)s}}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm c)

Açısal yerdeğiştirme $\theta(t)$ ile açısal hız $\omega(t)$ değişkenleriyle bunların Laplace dönüşümleri arasındaki bağıntıların (başlangıç koşullarının 0 olduğu hal için)

$$\omega(t) \triangleq \dot{\theta}(t) \quad \longleftrightarrow \quad \Omega(s) \triangleq s\Theta(s)$$

şeklinde olduğunu dikkate alırsak, çözüm b)'de bulunan transfer fonksiyonu kullanılarak sorunun cevabı

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} \triangleq \frac{s\Theta(s)}{V(s)} = \frac{Ks}{LJs^3 + (RJ + L\beta)s^2 + (R\beta + K^2)s}$$

veya (daha sade şekilde yazmak istersek)

$$\boxed{\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{LJs^2 + (RJ + L\beta)s + R\beta + K^2}}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm d)

Çözüm a)'da bulunan

$$\begin{aligned} V(t) &= RI(t) + L\dot{I}(t) + K\omega(t) \quad \text{(elektrik kısım)} \\ J\dot{\omega}(t) &= -\beta\omega(t) + KI(t) \quad \text{(mekanik kısım)} \end{aligned}$$

şeklindeki dinamik denklemleri, soruda verilen

$$x_1(t) \triangleq \theta(t) \quad x_2(t) \triangleq \omega(t) \quad x_3(t) \triangleq I(t) \quad u(t) \triangleq V(t)$$

tanımlarıyla (üç adet birinci derece diferansiyel denklem olarak) yeniden yazarsak

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \quad (\omega(t)\text{'nın tanımından}) \\ u(t) &= Rx_3(t) + L\dot{x}_3(t) + Kx_2(t) \quad \text{(elektrik kısım)} \\ J\dot{x}_2(t) &= -\beta x_2(t) + Kx_3(t) \quad \text{(mekanik kısım)} \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Bunları durumların türevleri yalnız kalacak şekilde düzenlersek

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{\beta}{J}x_2(t) + \frac{K}{J}x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{K}{L}x_2(t) - \frac{R}{L}x_3(t) + \frac{1}{L}u(t) \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Ayrıca soruda verilen çıkış tanımına ($y(t) \triangleq \theta(t)$) göre çıkış denklemini

$$y(t) = x_1(t)$$

şeklinde yazabiliriz. Bulunan bu denklemleri doğrusal durum uzayı modeli formunda yazarsak sorunun cevabı

$$\boxed{\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{J} & \frac{K}{J} \\ 0 & -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \end{aligned}}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm e)

Çözüm a)'da bulunan

$$V(t) = RI(t) + L\dot{I}(t) + K\omega(t) \quad \text{(elektrik kısım)}$$
$$J\dot{\omega}(t) = -\beta\omega(t) + KI(t) \quad \text{(mekanik kısım)}$$

şeklindeki dinamik denklemleri, soruda verilen

$$x_1(t) \triangleq \omega(t) \quad x_2(t) \triangleq I(t) \quad u(t) \triangleq V(t)$$

tanımlarıyla (iki adet birinci derece diferansiyel denklem olarak) yeniden yazarsak

$$u(t) = Rx_2(t) + L\dot{x}_2(t) + Kx_1(t) \quad \text{(elektrik kısım)}$$
$$J\dot{x}_1(t) = -\beta x_1(t) + Kx_2(t) \quad \text{(mekanik kısım)}$$

denklemlerini elde ederiz. Bunları durumların türevleri yalnız kalacak şekilde düzenlersek

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{\beta}{J}x_1(t) + \frac{K}{J}x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K}{L}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

denklemlerini elde ederiz. Ayrıca soruda verilen çıkış tanımına ($y(t) \triangleq \omega(t)$) göre çıkış denklemini

$$y(t) = x_1(t)$$

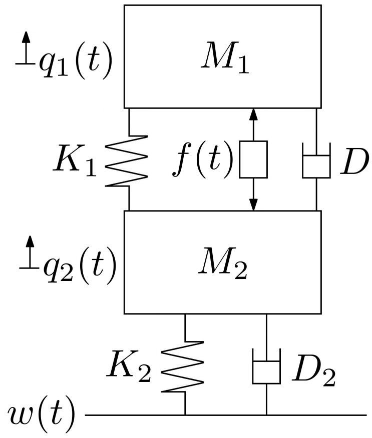
şeklinde yazabiliriz. Bulunan bu denklemleri doğrusal durum uzayı modeli formunda yazarsak sorunun cevabı

$$\boxed{\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\beta}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \end{aligned}}$$

şeklinde bulunur. $\square$

Soru 5 *Aktif süspansiyon sistemi*

Aşağıda tek eksenli öteleme hareketi yapan bir mekanik sistemin şeması verilmiştir. Bu, bir aracın çeyreğinin düşey hareketinin bir modelidir ve aktif süspansiyon sistemini temsil eder.



Sistem kütleleri M_1 ve M_2 olan cisimler, yay sabitleri K_1 ve K_2 olan yaylar, ve sönüm sabitleri D_1 ve D_2 olan damper elemanlarından oluşmaktadır. Cisimlerin istirahat haline göre yer değiştirmelerini $q_1(t)$ ve $q_2(t)$, sisteme uygulanan (birinci cisme yukarı, ikinci cisme aşağı yönlü etkiyen) giriş işareti olan kuvveti $f(t)$, sisteme etkiyen bozucu işareti olan zemin yerdeğiştirmesini ise $w(t)$ olarak isimlendirelim. Bütün başlangıç koşulları 0 kabul edilsin. Verilenlere göre sistemin

a) dinamik denklemlerini, bağımlı değişkenleri $q_1(t)$ ve $q_2(t)$, zorlama fonksiyonları $f(t)$ ve $w(t)$ olan iki adet bağlaşık tek değişkenli diferansiyel denklem olarak yazınız (not: bağlaşık diferansiyel denklemlerde, değişkenler birden fazla denklemde görünebilir).

b) uygulanan kuvvet $f(t)$'den birinci cismin yer değiştirmesi $q_1(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu bulunuz.

c) zemin yerdeğiştirmesi $w(t)$'den birinci cismin yer değiştirmesi $q_1(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu bulunuz.

d) uygulanan kuvvet $f(t)$'den ikinci cismin yer değiştirmesi $q_2(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu bulunuz.

e) zemin yerdeğiştirmesi $w(t)$'den ikinci cismin yer değiştirmesi $q_2(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu bulunuz.

f) uygulanan kuvvet $f(t)$'den birinci yayın deformasyonu $q_1(t)-q_2(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu bulunuz.

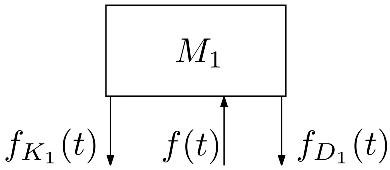
g) zemin yerdeğiştirmesi $w(t)$'den birinci yayın deformasyonu $q_1(t) - q_2(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu bulunuz.

h) doğrusal durum uzayı modelini birinci durum $q_1(t)$, ikinci durum $\dot{q}_1(t)$, üçüncü durum $q_2(t)$, dördüncü durum $\dot{q}_2(t)$, beşinci durum $w(t)$, birinci giriş $f(t)$, ikinci giriş $\dot{w}(t)$, birinci çıkış $q_1(t)$, ve ikinci çıkış $q_1(t) - q_2(t)$ tanımlarına göre bulunuz.

Çözüm a)

Önelikle sistemdeki (kütleleri M_1 ve M_2 olarak verilen) iki cisim için ayrı ayrı Newton'un ikinci yasasını yazmamız gerekir.

Birinci cismin serbest cisim diyagramını (cismi sistemden soyutlanmış şekilde ve etkiyen kuvvetler ile birlikte gösteren şekil) çizelim:



Şekilde birinci yay kuvveti $f_{K_1}(t)$, birinci damper kuvveti ise $f_{D_1}(t)$ ile gösterilmiştir. Birinci cismin yerdeğiştirmesi ikinci cisminkinden büyük olduğunda birinci yay birinci kütleye aşağı yönlü etkiyen bir kuvvet oluşturacaktır, dolayısıyla yay kuvveti

$$f_{K_1}(t) = K_1(q_1(t) - q_2(t))$$

şeklinde yazılır.

Not: Serbest cisim diyagramında örneğin $f_{K_1}(t)$ kuvvetini yukarı yönlü etkiyen şekilde çizip ifadesini $f_{K_1}(t) = K_1(q_2(t) - q_1(t))$ şeklinde de yazabilirdik. Bir kuvvet için serbest cisim diyagramında çizilen yön, o kuvvetin pozitif değer aldığında etkiyeceği yönü ifade eder. Aynı kuvvet (sistemin yanıtı boyunca) pozitif veya negatif değerler alabilir, dolayısıyla çizilen yönde veya ters yönde etkiyebilir.

Yukarıda $f_{K_1}(t)$ ifadesinin elde edilmesine benzer şekilde, birinci cismin hızı ikinci cisminkinden büyük olduğunda birinci damper birinci kütleye aşağı yönlü etkiyen bir kuvvet oluşturacaktır, dolayısıyla damper kuvveti

$$f_{D_1}(t) = D_1(\dot{q}_1(t) - \dot{q}_2(t))$$

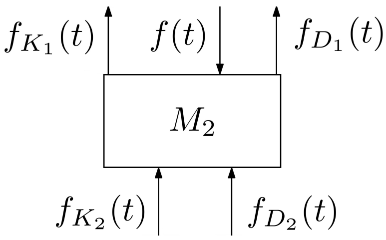
şeklinde yazılır (not: serbest cisim diyagramında $f_{D_1}(t)$'i yukarı yönlü etkiyen şekilde çizip $f_{D_1}(t) = K_1(\dot{q}_2(t) - \dot{q}_1(t))$ yazabilirdik). Bu ifadelerle birinci cisim için Newton'un ikinci yasasını yazarsak

$$M_1\ddot{q}_1(t) = -K_1(q_1(t) - q_2(t)) + f(t) - D_1(\dot{q}_1(t) - \dot{q}_2(t))$$

denklemini elde ederiz.

Çözüm a) (devam)

İkinci cismin serbest cisim diyagramını çizelim:



Şekilde birinci yay kuvveti $f_{K_1}(t)$, birinci damper kuvveti $f_{D_1}(t)$ ve giriş işareti $f(t)$, birinci cismin serbest cisim diyagramında çizilen yönlere ters yönlü olarak gösterilmiştir.

Not: $q_1(t)-q_2(t)$ ifadesinin değeri pozitif olduğunda, birinci yay birinci kütleyi aşağıya doğru (birinci kütlenin serbest cisim diyagramında gösterilen yönde), ikinci kütleyi ise yukarıya doğru (ikinci kütlenin serbest cisim diyagramında gösterilen yönde) kuvvet uygular.

İkinci yay kuvveti $f_{K_2}(t)$, ikinci damper kuvveti ise $f_{D_2}(t)$ ile gösterilmiştir. Zeminin yerdeğiştirmesi $w(t)$ ikinci cismin erdeğiştirmesinden büyük olduğunda ikinci yay birinci kütleye yukarı yönlü etkiyen bir kuvvet oluşturacaktır, dolayısıyla ikinci yay kuvveti

$$f_{K_2}(t) = K_2(w(t) - q_2(t))$$

şeklinde yazılır.

Yukarıda $f_{K_2}(t)$ ifadesinin elde edilmesine benzer şekilde, zeminin cismin hızı ikinci cisminkinden büyük olduğunda ikinci damper ikinci kütleye yukarı yönlü etkiyen bir kuvvet oluşturacaktır, dolayısıyla damper kuvveti

$$f_{D_2}(t) = D_2(\dot{w}(t) - \dot{q}_2(t))$$

şeklinde yazılır. Bu ifadelerle ikinci cisim için Newton'un ikinci yasasını yazarsak

$$M_2\ddot{q}_2(t) = K_1(q_1(t) - q_2(t)) - f(t) + D_1(\dot{q}_1(t) - \dot{q}_2(t)) + K_2(w(t) - q_2(t)) + D_2(\dot{w}(t) - \dot{q}_2(t))$$

denklemini elde ederiz.

İki dinamik denklemi birlikte yazarsak sorunun cevabı

$$\boxed{\begin{aligned} &M_1\ddot{q}_1(t) = -K_1(q_1(t) - q_2(t)) + f(t) - D_1(\dot{q}_1(t) - \dot{q}_2(t)) \\ &M_2\ddot{q}_2(t) = K_1(q_1(t) - q_2(t)) - f(t) + D_1(\dot{q}_1(t) - \dot{q}_2(t)) + K_2(w(t) - q_2(t)) + D_2(\dot{w}(t) - \dot{q}_2(t)) \end{aligned}}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm b)

Çözüm a) ile bulunan

$$\begin{aligned} M_1\ddot{q}_1(t) &= -K_1(q_1(t)-q_2(t)) + f(t) - D_1(\dot{q}_1(t)-\dot{q}_2(t)) \\ M_2\ddot{q}_2(t) &= K_1(q_1(t)-q_2(t)) - f(t) + D_1(\dot{q}_1(t)-\dot{q}_2(t)) + K_2(w(t)-q_2(t)) + D_2(\dot{w}(t)-\dot{q}_2(t)) \end{aligned}$$

şeklindeki dinamik denklemlerdeki değişkenlerin Laplace dönüşümlerini alırsak (not: soruda "bütün başlangıç koşullarını 0 kabul edin" denmiş)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= F(s) \\ \mathcal{L}\{w(t)\} &= W(s) \\ \mathcal{L}\{\dot{w}(t)\} &= sW(s) - \cancelto{0}{w(0)} = sW(s) \\ \mathcal{L}\{q_1(t)\} &= Q_1(s) \\ \mathcal{L}\{\dot{q}_1(t)\} &= sQ_1(s) - \cancelto{0}{q_1(0)} = sQ_1(s) \\ \mathcal{L}\{\ddot{q}_1(t)\} &= s^2Q_1(s) - s\cancelto{0}{q_1(0)} - \cancelto{0}{\dot{q}_1(0)} = s^2Q_1(s) \\ \mathcal{L}\{q_2(t)\} &= Q_2(s) \\ \mathcal{L}\{\dot{q}_2(t)\} &= sQ_2(s) - \cancelto{0}{q_2(0)} = sQ_2(s) \\ \mathcal{L}\{\ddot{q}_2(t)\} &= s^2Q_2(s) - s\cancelto{0}{q_2(0)} - \cancelto{0}{\dot{q}_2(0)} = s^2Q_2(s) \end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Bunlarla dinamik denklemleri tekrar yazarsak

$$\begin{aligned} M_1s^2Q_1(s) &= -K_1(Q_1(s)-Q_2(s)) + F(s) - D_1(sQ_1(s)-sQ_2(s)) \\ M_2s^2Q_2(s) &= K_1(Q_1(s)-Q_2(s)) - F(s) + D_1(sQ_1(s)-sQ_2(s)) + K_2(W(s)-Q_2(s)) + D_2(sW(s)-sQ_2(s)) \end{aligned}$$

Denklemlerde ortak terimli ifadeleri parantezlerde toplarsak

$$\begin{aligned} Q_1(s)\left(M_1s^2 + D_1s + K_1\right) &= Q_2(s)\left(D_1s + K_1\right) + F(s) \\ Q_2(s)\left(M_2s^2 + (D_1+D_2)s + K_1 + K_2\right) &= Q_1(s)\left(D_1s + K_1\right) - F(s) + W(s)\left(D_2s + K_2\right) \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Burada denklemleri kolay yazabilmek için aşağıdaki tanımlarla ifadeleri sadeleştirebiliriz

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\triangleq M_1s^2 + D_1s + K_1 \\ \Delta_2 &\triangleq D_1s + K_1 \\ \Delta_3 &\triangleq M_2s^2 + (D_1+D_2)s + K_1 + K_2 \\ \Delta_4 &\triangleq D_2s + K_2 \end{aligned}$$

ve denklemleri

$$\begin{aligned} Q_1(s)\Delta_1 &= Q_2(s)\Delta_2 + F(s) \\ Q_2(s)\Delta_3 &= Q_1(s)\Delta_2 - F(s) + W(s)\Delta_4 \end{aligned}$$

şeklinde tekrar yazabiliriz.

Çözüm b) (devam)

Soruda $f(t)$'den $q_1(t)$'ya olan transfer fonksiyonu istenmiş, dolayısıyla $w(t)$'yi (ve $W(s)$'yi) 0 kabul etmemiz ve denklemleri sadece $q_1(t)$ (yani $Q_1(s)$) içeren terimlerle yazmamız gerekir. Bunun için yukarıdaki birinci denklemde $Q_2(s)$'yu yalnız bırakırsak

$$Q_2(s) = \frac{Q_1(s)\Delta_1 - F(s)}{\Delta_2}$$

ifadesini elde ederiz. Bunu yukarıdaki ikinci denklemde $Q_2(s)$ yerine yazarsak

$$\frac{Q_1(s)\Delta_1 - F(s)}{\Delta_2}\Delta_3 = Q_1(s)\Delta_2 - F(s) + W(s)\Delta_4$$

ifadesini elde ederiz. $W(s) = 0$ yazıp $Q_1(s)$'li terimleri solda, $F(s)$'li terimleri sağda toplarsak

$$Q_1(s)\left(\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2\right) = F(s)\left(\Delta_3 - \Delta_2\right)$$

ifadesini elde ederiz. Buradan sorunun cevabı

$$\frac{Q_1(s)}{F(s)} = \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2}$$

veya, Δ terimleriyle yapılan sadeleştirmeleri geri alırsak

$$\boxed{\frac{Q_1(s)}{F(s)} = \frac{M_2s^2 + D_2s + K_2}{\left(M_1s^2 + D_1s + K_1\right)\left(M_2s^2 + (D1 + D2)s + K_1 + K_2\right) - \left(D_1s + K_1\right)^2}}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm c)

Soruda $w(t)$'den $q_1(t)$'ya olan transfer fonksiyonu istenmiş, dolayısıyla $f(t)$'yi (ve $F(s)$'yi) 0 kabul etmemiz ve denklemleri sadece $q_1(t)$ (yani $Q_1(s)$) içeren terimlerle yazmamız gerekir.

Çözüm b)'de bulunan

$$\frac{Q_1(s)\Delta_1 - F(s)}{\Delta_2}\Delta_3 = Q_1(s)\Delta_2 - F(s) + W(s)\Delta_4$$

denkleminde $F(s) = 0$ yazıp $Q_1(s)$'li terimleri solda, $W(s)$'li terimleri sağda toplarsak

$$Q_1(s)\left(\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2\right) = W(s)\Delta_2\Delta_4$$

ifadesini elde ederiz. Buradan sorunun cevabı

$$\frac{Q_1(s)}{W(s)} = \frac{\Delta_2\Delta_4}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2}$$

veya, Δ terimleriyle yapılan sadeleştirmeleri geri alırsak

$$\boxed{\frac{Q_1(s)}{W(s)} = \frac{(D_1 s + K_1)(D_2 s + K_2)}{(M_1 s^2 + D_1 s + K_1)\left(M_2 s^2 + (D1 + D2)s + K_1 + K_2\right) - (D_1 s + K_1)^2}}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm d)

Soruda $f(t)$'den $q_2(t)$'ya olan transfer fonksiyonu istenmiş, dolayısıyla $w(t)$'yi (ve $W(s)$'yi) 0 kabul etmemiz ve denklemleri sadece $q_2(t)$ (yani $Q_2(s)$) içeren terimlerle yazmamız gerekir.

Çözüm b)'de bulunan

$$\begin{aligned} Q_1(s)\Delta_1 &= Q_2(s)\Delta_2 + F(s) \\ Q_2(s)\Delta_3 &= Q_1(s)\Delta_2 - F(s) + W(s)\Delta_4 \end{aligned}$$

denklemlerindeki birinci denklemde $Q_1(s)$'yu yalnız bırakırsak

$$Q_1(s) = \frac{Q_2(s)\Delta_2 + F(s)}{\Delta_1}$$

Bunu yukarıdaki ikinci denklemde $Q_1(s)$ yerine yazarsak

$$Q_2(s)\Delta_3 = \frac{Q_2(s)\Delta_2 + F(s)}{\Delta_1}\Delta_2 - F(s) + W(s)\Delta_4$$

ifadesini elde ederiz. $W(s) = 0$ yazıp $Q_2(s)$'lu terimleri solda, $F(s)$'li terimleri sağda toplarsak

$$Q_2(s)\left(\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2\right) = F(s)\left(\Delta_2 - \Delta_1\right)$$

ifadesini elde ederiz. Buradan sorunun cevabı

$$\frac{Q_2(s)}{F(s)} = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2}$$

veya, Δ terimleriyle yapılan sadeleştirmeleri geri alırsak

$$\boxed{\frac{Q_2(s)}{F(s)} = \frac{-M_1 s^2}{\left(M_1 s^2 + D_1 s + K_1\right)\left(M_2 s^2 + (D1 + D2)s + K_1 + K_2\right) - \left(D_1 s + K_1\right)^2}}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm e)

Soruda $w(t)$'den $q_2(t)$'ya olan transfer fonksiyonu istenmiş, dolayısıyla $f(t)$'yi (ve $F(s)$'yi) 0 kabul etmemiz ve denklemleri sadece $q_2(t)$ (yani $Q_2(s)$) içeren terimlerle yazmamız gerekir.

Çözüm d)'de bulunan

$$Q_2(s)\Delta_3 = \frac{Q_2(s)\Delta_2 + F(s)}{\Delta_1}\Delta_2 - F(s) + W(s)\Delta_4$$

denkleminde $F(s) = 0$ yazıp $Q_2(s)$'lu terimleri solda, $W(s)$'li terimleri sağda toplarsak

$$Q_2(s)\left(\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2\right) = W(s)\Delta_1\Delta_4$$

ifadesini elde ederiz. Buradan sorunun cevabı

$$\frac{Q_2(s)}{W(s)} = \frac{\Delta_1\Delta_4}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2}$$

veya, Δ terimleriyle yapılan sadeleştirmeleri geri alırsak

$$\boxed{\frac{Q_2(s)}{W(s)} = \frac{\left(M_1s^2 + D_1s + K_1\right)(D_2s + K_2)}{(M_1s^2 + D_1s + K_1)(M_2s^2 + (D1 + D2)s + K_1 + K_2) - (D_1s + K_1)^2}}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm f)

Soruda istenen $f(t)$'den $q_1(t) - q_2(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu

$$\frac{Q_1(s) - Q_2(s)}{F(s)} = \frac{Q_1(s)}{F(s)} - \frac{Q_2(s)}{F(s)}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradaki $Q_1(s)/F(s)$ transfer fonksiyonunu Çözüm b)'de

$$\frac{Q_1(s)}{F(s)} = \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2}$$

şeklinde, $Q_2(s)/F(s)$ transfer fonksiyonunu ise Çözüm d)'de

$$\frac{Q_2(s)}{F(s)} = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2}$$

şeklinde bulduk. Bunları birleştirirsek sorunun cevabı

$$\frac{Q_1(s) - Q_2(s)}{F(s)} = \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2} - \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2} = \frac{\Delta_3 - 2\Delta_2 + \Delta_1}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2}$$

veya, Δ terimleriyle yapılan sadeleştirmeleri geri alırsak

$$\boxed{\frac{Q_1(s) - Q_2(s)}{F(s)} = \frac{(M_1 + M_2)\, s^2 + D_2 s + K_2}{(M_1 s^2 + D_1 s + K_1)\,(M_2 s^2 + (D1 + D2)s + K_1 + K_2) - (D_1 s + K_1)^2}}$$

şeklinde bulunur. $\square$

Çözüm g)

Soruda istenen $w(t)$'den $q_1(t) - q_2(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu

$$\frac{Q_1(s) - Q_2(s)}{W(s)} = \frac{Q_1(s)}{W(s)} - \frac{Q_2(s)}{W(s)}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradaki $Q_1(s)/W(s)$ transfer fonksiyonunu Çözüm c)'de

$$\frac{Q_1(s)}{W(s)} = \frac{\Delta_2\Delta_4}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2}$$

şeklinde, $Q_2(s)/W(s)$ transfer fonksiyonunu ise Çözüm e)'de

$$\frac{Q_2(s)}{W(s)} = \frac{\Delta_1\Delta_4}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2}$$

şeklinde bulduk. Bunları birleştirirsek sorunun cevabı

$$\frac{Q_1(s) - Q_2(s)}{W(s)} = \frac{\Delta_2\Delta_4}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2} - \frac{\Delta_1\Delta_4}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2} = \frac{\Delta_4\left(\Delta_2 - \Delta_1\right)}{\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2}$$

veya, Δ terimleriyle yapılan sadeleştirmeleri geri alırsak

$$\boxed{\frac{Q_1(s) - Q_2(s)}{W(s)} = \frac{-M_1 D_2 s^3 - M_1 K_2 s^2}{\left(M_1 s^2 + D_1 s + K_1\right)\left(M_2 s^2 + (D1 + D2)s + K_1 + K_2\right) - \left(D_1 s + K_1\right)^2}}$$

şeklinde bulunur. $\square$

Çözüm h)

Çözüm a)'da bulunan

$$\begin{aligned}
M_1\ddot{q}_1(t) &= -K_1(q_1(t)-q_2(t)) + f(t) - D_1(\dot{q}_1(t)-\dot{q}_2(t)) \\
M_2\ddot{q}_2(t) &= K_1(q_1(t)-q_2(t)) - f(t) + D_1(\dot{q}_1(t)-\dot{q}_2(t)) + K_2(w(t)-q_2(t)) + D_2(\dot{w}(t)-\dot{q}_2(t))
\end{aligned}$$

şeklindeki dinamik denklemleri, soruda verilen

$$x_1(t) \triangleq q_1(t) \quad x_2(t) \triangleq \dot{q}_1(t) \quad x_3(t) \triangleq q_2(t) \quad x_4(t) \triangleq \dot{q}_2(t) \quad x_5(t) \triangleq w(t)$$
$$u_1(t) \triangleq f(t) \quad u_2(t) \triangleq \dot{w}(t)$$
$$y_1(t) \triangleq q_1(t) \quad y_2(t) \triangleq q_1(t) - q_2(t)$$

tanımlarıyla (beş adet birinci derece diferansiyel denklem olarak) yeniden yazarsak

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
M_1\dot{x}_2(t) &= -K_1(x_1(t)-x_3(t)) + u_1(t) - D_1(x_2(t)-x_4(t)) \\
\dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
M_2\dot{x}_4(t) &= K_1(x_1(t)-x_3(t)) - u_1(t) + D_1(x_2(t)-x_4(t)) + K_2(x_5(t)-x_3(t)) + D_2(u_2(t)-x_4(t)) \\
\dot{x}_5(t) &= u_2(t)
\end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Bunları durumların türevleri yalnız kalacak ve terimler sıralı olacak şekilde düzenlersek

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
&\dot{x}_2(t) = -\frac{K_1}{M_1}x_1(t) - \frac{D_1}{M_1}x_2(t) + \frac{K_1}{M_1}x_3(t) + \frac{D_1}{M_1}x_4(t) + u_1(t) \\
&\dot{x}_3(t) = x_4(t) \\
&\dot{x}_4(t) = \frac{K_1}{M_2}x_1(t) + \frac{D_1}{M_2}x_2(t) - \frac{K_1+K_2}{M_2}x_3(t) - \frac{D_1+D_2}{M_2}x_4(t) + \frac{K_2}{M_2}x_5(t) - u_1(t) + \frac{D_2}{M_2}u_2(t) \\
&\dot{x}_5(t) = u_2(t)
\end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz.

Çözüm h) (devam)

Ayrıca soruda verilen çıkış tanımlarına ($y_1(t) \triangleq q_1(t)$, $y_2(t) \triangleq q_1(t) - q_2(t)$) göre çıkış denklemlerini

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) \\ y_2(t) &= x_1(t) - x_3(t) \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Bulunan bu denklemleri doğrusal durum uzayı modeli formunda yazarsak sorunun cevabı

$$\boxed{\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{M_1} & -\frac{D_1}{M_1} & \frac{K_1}{M_1} & \frac{D_1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_1}{M_2} & \frac{D_1}{M_2} & -\frac{K_1+K_2}{M_2} & -\frac{D_1+D_2}{M_2} & \frac{K_2}{M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & \frac{D_2}{M_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}}_{u(t)} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}}_{y(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \end{aligned}}$$

şeklinde bulunur. □

Soru 6 *RLC devresinin doğrusal modeli için kararlılık analizi*

Parametreleri sırasıyla R, L ve C olan direnç, endüktör ve kapasitör elemanları ile modellenmiş bir RLC devresinin sürekli-zamanlı doğrusal durum uzayı modeli aşağıda verilmiştir

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

a) Model parametrelerinin sayısal değerleri $R = 3$, $L = C = 1$ olsun. Sistemin kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

b) Model parametrelerinin sayısal değerleri $R = L = C = 1$ olsun. Sistemin kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

c) Model parametrelerinin sayısal değerleri $R = -1$, $L = C = 1$ olsun. Sistemin kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

d) Model parametrelerinin sayısal değerleri $R = -3$, $L = C = 1$ olsun. Sistemin kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

e) Model parametrelerinin sayısal değerleri $R = 3$, $L = -1$, $C = 1$ olsun. Sistemin kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

f) Model parametrelerinin sayısal değerleri $R = 0$, $L = 1$, $C = 1$ olsun. Sistemin kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

Çözüm a)

Verilen parametre değerleri için durum matrisi

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -2.62$, $\lambda_2 = -0.38$ olarak bulunur.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ formundaki 2×2 matrisin özdeğerlerinin hesabı ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$):

$$T \triangleq a + d \qquad D \triangleq ad - bc$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}T + \sqrt{\frac{T^2}{4} - D}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}T - \sqrt{\frac{T^2}{4} - D}$$

Bütün özdeğerlerin gerçel (*real*) kısmı kesin negatif (*strictly negative*) ($\mathrm{Re}(\lambda_1) = -2.62 < 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) = -0.38 < 0$) olduğundan bu modele göre sistem asimptotik kararlıdır.

Çözüm b)

Verilen parametre değerleri için durum matrisi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -0.5 + 0.87j$, $\lambda_2 = -0.5 - 0.87j$ olarak bulunur. Bütün özdeğerlerin gerçel (*real*) kısmı kesin negatif (*strictly negative*) ($\mathrm{Re}(\lambda_1) = -0.5 < 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) = -0.5 < 0$) olduğundan bu modele göre sistem asimptotik kararlıdır.

Çözüm c)

Verilen parametre değerleri için durum matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 0.5 + 0.87j$, $\lambda_2 = 0.5 - 0.87j$ olarak bulunur. Gerçel (*real*) kısmı kesin pozitif (*strictly positive*) olan en az bir özdeğer ($\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0.5$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) = 0.5$) olduğundan bu modele göre sistem kararsızdır.

Çözüm d)

Verilen parametre değerleri için durum matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 2.62$, $\lambda_2 = 0.38$ olarak bulunur. Gerçel (*real*) kısmı kesin pozitif (*strictly positive*) olan en az bir özdeğer ($\mathrm{Re}(\lambda_1) = 2.62$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) = 0.38$) olduğundan bu modele göre sistem kararsızdır.

Çözüm e)

Verilen parametre değerleri için durum matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -0.3$, $\lambda_2 = 3.3$ olarak bulunur. Gerçel (*real*) kısmı kesin pozitif (*strictly positive*) olan en az bir özdeğer ($\mathrm{Re}(\lambda_2) = 3.3$) olduğundan bu modele göre sistem kararsızdır.

Çözüm f)

Verilen parametre değerleri için durum matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = j$, $\lambda_2 = -j$ olarak bulunur. Özdeğerlerin gerçel (*real*) kısmı 0 (yani, sanal eksen üzerinde) ancak tekrarlanmamış olduğundan bu modele göre sistem marjinal kararlıdır.

Soru 7 *Tekrarlanmış özdeğerler için kararlılık*

Bir sistemin sürekli-zamanlı doğrusal durum uzayı modeli aşağıda verilmiştir

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Sistemin kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

Çözüm)

A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ olarak bulunur. Özdeğerlerin gerçel (*real*) kısmı 0 (yani, sanal eksen üzerinde) ancak tekrarlanmış olduğundan bu modele göre sistem kararsızdır.

Soru 8 *Doğrusallaştırma*

Bir sistemin sürekli-zamanlı doğrusal-olmayan durum uzayı modeli aşağıda verilmiştir

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \sin(x_1(t)) - x_2(t) \end{bmatrix}$$

Verilenlere göre sistemin doğrusal-olmayan bu modelinin

a) 0'dan farklı, elemanları pozitif, ve en küçük mutlak değerli denge noktasını bulunuz.

b) a)'da bulunan denge noktası etrafında doğrusallaştırılmasıyla elde edilen sürekli-zamanlı doğrusal durum uzayı modelinin durum matrisini bulunuz.

c) b)'de bulunan doğrusal modeline dayanarak sistemin kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

d) $x_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ olarak verilen denge noktası etrafında doğrusallaştırılmasıyla elde edilen sürekli-zamanlı doğrusal durum uzayı modelinin durum matrisini bulunuz.

e) d)'de bulunan doğrusal modeline dayanarak sistemin kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

Çözüm a)

Denge durumları, $\dot{x} = f(x) = 0$ denklemini sağlayan $x = x_d$ noktalarıdır. Verilen sistem modeli için

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin(x_1) - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

denklemini sağlayan x_d noktaları, elemanları

$$x_{2,d} = 0 \quad \text{(birinci denklemden)}$$

$$\sin(x_{1,d}) - \cancelto{0}{x_{2,d}} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \sin(x_{1,d}) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x_{1,d} = \pm n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{(ikinci denklemden)}$$

denklemlerini sağlayan, yani

$$x_d = \begin{bmatrix} \pm n\pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

formundaki noktalardır. Sorunun cevabı, bunların arasından 0'dan farklı, elemanları pozitif, ve en küçük mutlak değerli olan nokta, yani

$$\boxed{x_d = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}}$$

olarak bulunur.

Çözüm b)

Sürekli-zamanlı doğrusal-olmayan iki boyutlu sistemlerin genel formu şu şekildedir:

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^2 \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$$

Bu formdaki sistemler için doğrusallaştırma şu şekilde yapılır:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (x,\ f \in \mathbb{R}^2 \text{ için Jakobi matrisinin tanımı})$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_d) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1 = x_{1,d} \\ x_2 = x_{2,d}}}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (\text{doğrusal durum uzayı modeli})$$

Doğrusal-olmayan modelin $f_1(x_1, x_2)$ ve $f_2(x_1, x_2)$ fonksiyonları şu şekildedir:

$$f_1(x_1, x_2) = x_2$$
$$f_2(x_1, x_2) = \sin(x_1) - x_2$$

Verilen model için kısmı türevli terimleri hesaplarsak

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \cos(x_1) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$$

ifadelerini elde ederiz. Buradan Jakobi matrisi

$$\frac{\partial f}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x_1) & -1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matrisin a)'da bulunan $x_d = \begin{bmatrix} \pi & 0 \end{bmatrix}^T$ denge noktası için değerini

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1 = x_{1,d} \\ x_2 = x_{2,d}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x_1) & -1 \end{bmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1 = \pi \\ x_2 = 0}}$$

işlemiyle hesaplarsak, sorunun cevabı

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}$$

olarak bulunur.

Çözüm c)

Çözüm b)'deki doğrusallaştırma ile bulunan doğrusal durum uzayı modelinin durum matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -0.5 + 0.87j$, $\lambda_2 = -0.5 - 0.87j$ olarak bulunur. Bütün özdeğerlerin gerçel (*real*) kısmı kesin negatif (*strictly negative*) ($\mathrm{Re}(\lambda_1) = -0.5 < 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) = -0.5 < 0$) olduğundan (Lyapunov'un endirekt yöntemine göre) doğrusal-olmayan modelin (doğrusallaştırmada ele alınan) denge durumu $x_d = \begin{bmatrix} \pi & 0 \end{bmatrix}^T$ asimptotik kararlıdır.

Çözüm d)

Çözüm b)'de

$$\frac{\partial f}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x_1) & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunan Jakobi matrisinin soruda verilen $x_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ denge noktası için değerini

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x_1 = x_{1,d} \\ x_2 = x_{2,d}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x_1) & -1 \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x_1 = 0 \\ x_2 = 0}}$$

işlemiyle hesaplarsak, sorunun cevabı

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}$$

olarak bulunur.

Çözüm e)

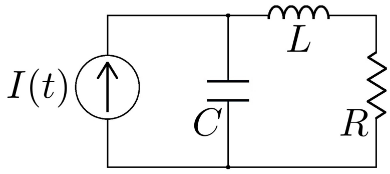
Çözüm d)'deki doğrusallaştırma ile bulunan doğrusal durum uzayı modelinin durum matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -1.62$, $\lambda_2 = 0.62$ olarak bulunur. Gerçel (*real*) kısmı kesin pozitif (*strictly positive*) olan en az bir özdeğer ($\mathrm{Re}(\lambda_2) = 0.62$) olduğundan (Lyapunov'un endirekt yöntemine göre) doğrusal-olmayan modelin (doğrusallaştırmada ele alınan) denge durumu $x_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ kararsızdır.

Soru 9 *RLC devresi (akım kaynaklı)*

Aşağıda, parametreleri sırasıyla R, L ve C olan direnç, endüktör ve kapasitör elemanlarından oluşan bir RLC devresinin şeması verilmiştir.



Şemadaki $I(t)$ ideal bir akım kaynağı ile devreye sağlanan akımı belirtmektedir (not: ideal akım kaynağının devreye sağladığı akım, kaynağın üzerindeki gerilim düşüşünden bağımsızdır). Kapasitörün üzerindeki yükü ve gerilim düşüşünü sırasıyla $Q(t)$ ve $V_C(t)$ olarak, endüktörden geçen akımı ise $I(t)$ olarak isimlendirelim. Bütün başlangıç koşulları 0 kabul edilsin. Verilenlere göre RLC devresinin

a) dinamik denklemini, bağımlı değişkeni $Q(t)$ ve zorlama fonksiyonu $I(t)$ olan bir tek değişkenli diferansiyel denklem olarak yazınız.

b) sağlanan akım $I(t)$'den kapasitörün üzerindeki yük $Q(t)$'ya olan transfer fonksiyonunu bulunuz.

c) doğrusal durum uzayı modelini birinci durum $Q(t)$, ikinci durum $I_L(t)$, giriş $I(t)$, ve çıkış $V_C(t)$ tanımlarına göre bulunuz.

Çözüm a)

Kapasitörün üzerindeki akıma $I_C(t)$ diyelim. Kirchhoff'un akım yasasından $I(t) = I_L(t) + I_C(t)$ ve $I_C(t) = \dot{Q}(t)$ yazabiliriz. $I_C(t)$'yi eleyip bu iki denklemi birleştirerek

$$I_L(t) = I(t) - \dot{Q}(t)$$

yazabiliriz.

Endüktör ve direncin üzerindeki gerilim düşüşlerine sırasıyla $V_L(t)$ ve $V_R(t)$ diyelim. Devrenin sağ taraftaki çevrimi için Kirchhoff'un gerilim yasasından

$$V_C(t) = V_L(t) + V_R(t)$$

yazabiliriz. İdeal kapasitör modelinden $V_C(t) = Q(t)/C$, Ohm yasasından $V_R(t) = RI_L(t)$, Faraday yasasından ise $V_L(t) = L\dot{I}_L(t)$ yazabiliriz. Bu ifadelerle yukarıdaki denklemi tekrar yazarsak

$$\frac{1}{C}Q(t) = L\dot{I}_L(t) + RI_L(t)$$

denklemini elde ederiz. Burada yukarıda bulunan $I_L(t) = I(t) - \dot{Q}(t)$ ifadesini kullanarak $I_L(t)$ yerine $I(t) - \dot{Q}(t)$ yazarsak

$$\frac{1}{C}Q(t) = L\underbrace{\left(\dot{I}(t) - \ddot{Q}(t)\right)}_{\dot{I}_L(t)} + R\underbrace{\left(I(t) - \dot{Q}(t)\right)}_{I_L(t)}$$

denklemini elde ederiz. Denklemi açıp $Q(t)$'lu terimleri sol tarafta, $I(t)$'lı terimleri sağ tarafta toplarsak sorunun cevabı

$$\frac{1}{C}Q(t) + L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) = L\dot{I}(t) + RI(t)$$

veya ($\ddot{Q}(t)$ teriminin katsayısını 1 yapıp terimleri sıralı yazmak istersek)

$$\boxed{\ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{1}{LC}Q(t) = \dot{I}(t) + \frac{R}{L}I(t)}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm b)

Çözüm a) ile bulunan

$$\ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{1}{LC}Q(t) = \dot{I}(t) + \frac{R}{L}I(t)$$

şeklindeki dinamik denklemdeki değişkenlerin Laplace dönüşümlerini alırsak (not: soruda “bütün başlangıç koşullarını 0 kabul edin” denmiş)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{I(t)\} &= I(s) \\
\mathcal{L}\{\dot{I}(t)\} &= sI(s) - \cancelto{0}{I(0)} = sI(s) \\
\mathcal{L}\{Q(t)\} &= Q(s) \\
\mathcal{L}\{\dot{Q}(t)\} &= sQ(s) - \cancelto{0}{Q(0)} = sQ(s) \\
\mathcal{L}\{\ddot{Q}(t)\} &= s^2Q(s) - s\cancelto{0}{Q(0)} - \cancelto{0}{\dot{Q}(0)} = s^2Q(s)
\end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Bunlarla dinamik denklemi tekrar yazarsak

$$s^2Q(s) + \frac{R}{L}sQ(s) + \frac{1}{LC}Q(s) = sI(s) + \frac{R}{L}I(s)$$

denklemini elde ederiz. Burada sol tarafı $Q(s)$, sağ tarafı $I(s)$ parantezine alarak

$$Q(s)\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right) = \left(s + \frac{R}{L}\right)I(s)$$

yazabiliriz. Buradan da sorunun cevabı

$$\frac{Q(s)}{I(s)} = \frac{s + \frac{R}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

veya (daha sade şekilde yazmak istersek)

$$\boxed{\frac{Q(s)}{I(s)} = \frac{Ls + R}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}}$$

şeklinde bulunur. □

Çözüm c)

Çözüm a)'da bulunan

$$\begin{aligned} I(t) &= I_L(t) + \dot{Q}(t) \quad \text{(Kirchhoff'un akım yasası)} \\ \frac{1}{C}Q(t) &= L\dot{I}_L(t) + RI_L(t) \quad \text{(Kirchhoff'un gerilim yasası)} \end{aligned}$$

şeklindeki dinamik denklemleri, soruda verilen

$$x_1(t) \triangleq Q(t) \quad x_2(t) \triangleq I_L(t) \quad u(t) \triangleq I(t)$$

tanımlarıyla (iki adet birinci derece diferansiyel denklem olarak) yeniden yazarsak

$$\begin{aligned} u(t) &= x_2(t) + \dot{x}_1(t) \quad \text{(Kirchhoff'un akım yasası)} \\ \frac{1}{C}x_1(t) &= L\dot{x}_2(t) + Rx_2(t) \quad \text{(Kirchhoff'un gerilim yasası)} \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Bunları durumların türevleri yalnız kalacak şekilde düzenlersek

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Ayrıca soruda verilen çıkış tanımına ($y(t) \triangleq V_C(t) = \frac{1}{C}Q(t)$) göre çıkış denklemini

$$y(t) = \frac{1}{C}x_1(t)$$

şeklinde yazabiliriz. Bulunan bu denklemleri doğrusal durum uzayı modeli formunda yazarsak sorunun cevabı

$$\boxed{\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \end{aligned}}$$

şeklinde bulunur. □