1) 3-vektörler u ve v aşağıdaki gibi olsun:

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) $u^T \cdot v = ?$

Çözüm:

$$u^T \cdot v = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = (2)(-1) + (1)\cdot(4) + (-3)(2) = \boxed{-4}$$

(iç çarpım)

b) u ve v arasındaki açıyı hesaplayın.

Çözüm:

$$\cos(\theta) = \frac{u^T \cdot v}{\|u\| \, \|v\|} \qquad u^T \cdot v \rightarrow -4$$

$$\|u\| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + (4)^2 + (2)^2} = \sqrt{21}$$

$$\cos(\theta) = \frac{-4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = -0.527$$

$$\theta = \arccos(-0.527) \cong \boxed{122.2^\circ}$$

c) u doğrultusundaki birim vektörü hesaplayın.

Çözüm: u doğrultusundaki birim vektör u ile hizalanmış (aligned) ve normu 1 olan vektördür.

$$\boxed{\frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}}$$

(not: herhangi bir vektör, normuna bölünerek normu 1 olan vektör elde edilebilir (düzgeleme/normalization))

② $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ a \end{bmatrix} \right\}$ olarak verilen bir vektör kümesinin doğrusal bağımlı olması için a hangi değeri almalıdır?

Çözüm: doğrusal bağımlılık için v_2'yi v_1'in bir katı (en genel halde, kümedeki diğer vektörlerin doğrusal bileşimi) olarak yazabilmeliyiz.

$v_2 = K \cdot v_1$ (K bilinmeyen bir katsayı) dersek:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ a \end{bmatrix} = K \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 = K \\ a = K \cdot 2 \end{array}\right\}$$ buradan $\boxed{a = 6}$ bulunur.

(3) $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ olarak verilen vektör kümesi doğrusal bağımsız mıdır?

Çözüm: Doğrusal bağımsızlığı test etmek için, verilen vektörler sütunlar olacak şekilde bir A matrisi oluşturalım ve bu A matrisi için $Ax=0$ denklemini inceleyelim. Denklemin eşsiz çözümü $x=0$ ise vektörler doğrusal bağımsızdır.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$Ax=0$ denklemini açık olarak yazarsak:

$$x_1 = 0$$
$$2x_1 - x_2 = 0$$
$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$$

Bu denklemleri çözersek:

$$x_1 = 0 \qquad 2\cdot 0 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$-0 + 4\cdot 0 + 3\cdot x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0$$

denklemin çözümü $x=0$ olarak bulunur.

dolayısıyla vektör kümesi doğrusal bağımsızdır.

4) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilen denklem takımını $A \cdot x = b$ formunda yazmak için gereken A matrisini ve b vektörünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b}$$

(5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ olarak verilen

A matrisinin QR ayrıştırmasındaki

Q çarpanı

$$Q = \begin{bmatrix} -0.1961 & -0.6052 & -0.7715 \\ 0 & -0.7868 & 0.6172 \\ -0.9806 & 0.1210 & 0.1543 \end{bmatrix}$$

olarak verilsin.

Ayrıca R'nin 3. sütunu $\begin{bmatrix} -0.5883 \\ -4.9629 \\ 0.1543 \end{bmatrix}$ olarak verilsin.

Sağ el tarafı $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ olarak verilen

$Ax = b$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Önce QR ayrıştırmasındaki R

çarpanını bulalım. Genel formda

(R üst üçgen) yazarsak $(A = QR)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.1961 & -0.6052 & -0.7715 \\ 0 & -0.7868 & 0.6172 \\ -0.9806 & 0.1210 & 0.1543 \end{bmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & -0.5883 \\ 0 & R_{22} & -4.9629 \\ 0 & 0 & 0.1543 \end{bmatrix}}_{R}$$

Q'nun 1. satırı ile R'nin 1. sütununun çarpımı A'nın A_{11} elemanını verir (matris çarpımının tanımından):

$$-0.1961 \cdot R_{11} = 1 \longrightarrow R_{11} = -5.0994$$

benzer şekilde, Q'nun 2. satırıyla R'nin 2. sütununun çarpımı A'nın A_{22} elemanını verir.

$$-0.7868 \cdot R_{22} = 1 \rightarrow R_{22} = -1.271$$

benzer işlemleri devam ettirirsek

Q'nun 1. satırı ve R'nin 2. sütunu $\rightarrow A_{12}$

$$-0.1961 \cdot R_{12} - 0.6052 \cdot R_{22} = 2$$

$$\rightarrow R_{12} = -6.2763$$

sonuç olarak R matrisi şu şekilde bulunur:

$$R = \begin{bmatrix} -5.0994 & -6.2763 & -0.5883 \\ 0 & -1.271 & -4.9629 \\ 0 & 0 & 0.1543 \end{bmatrix}$$

$Ax = b$ denklemini $Q \cdot R \cdot x = b$ olarak yazabiliriz. Çözümü $x = A^{-1} \cdot b$ formundadır.

$$A = QR \leftrightarrow A^{-1} = (QR)^{-1} = R^{-1} Q^{-1} = R^{-1} Q^T$$

$Q^{-1} = Q^T$ çünkü Q dikgen matris

$Q R \cdot x = b$, $R \cdot x = Q^T \cdot b$ olarak yazılabilir.

$Q^T \cdot b = c$ diyelim. $c = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.1961 & 0 & -0.9806 \\ -0.6052 & -0.7868 & 0.121 \\ -0.7715 & 0.6172 & 0.1543 \end{bmatrix}}_{Q^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b} = \begin{bmatrix} -2.1573 \\ -0.3631 \\ -0.4629 \end{bmatrix}$ olur.

$Rx = c$ denklemi için geri yönde yerine koyma ile x hesaplanabilir:

$$\begin{bmatrix} -5.0994 & -6.2763 & -0.5883 \\ 0 & -1.271 & -4.9629 \\ 0 & 0 & 0.1543 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.1573 \\ -0.3631 \\ -0.4629 \end{bmatrix}$$

$$0.1543 \cdot x_3 = -0.4629 \rightarrow x_3 = -3$$

$$-1.271 \cdot x_2 - 4.9629\, x_3 = -0.3631 \rightarrow x_2 = 12$$

$$-5.0994\, x_1 - 6.2763 \cdot x_2 - 0.5883\, x_3 = -2.1573 \rightarrow x_1 = -14$$

Sonuç olarak $Ax = b$ denkleminin çözümü

$$x = \begin{bmatrix} -14 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix}$$ olarak bulunur.

⑥ (2023 vize sorusu)

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $v = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$ vektörleri verilmiştir.

a) $u^T \cdot v = ?$

Çözüm:

$$u^T \cdot v = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot 5 + 3 \cdot (-6) = -32$$

b) v ile aynı yönlü birim vektörü bulunuz.

Çözüm:

$$\|v\| = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2 + (-6)^2} = 8.775$$

$$\frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{8.775} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.456 \\ 0.567 \\ -0.684 \end{bmatrix}$$

7 (2023 vize sorusu)

A matrisi ve b vektörü

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak verilmiştir.

a) $A^{-1} = ?$

Çözüm:

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 4 - 1 \cdot 3} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

b) $Ax = b$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: $Ax = b \rightarrow x^* = A^{-1} \cdot b$

$$x^* = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

(8) (2023 vize sorusu)

Aşağıda bir denklem takımı verilmiştir.

$$4x_1 - 3x_3 + 2x_2 = b_3$$
$$-3x_2 + 2x_3 - x_1 = b_2$$
$$-5x_3 + 2x_1 + x_2 = b_1$$

Verilen denklem takımını

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

tanımlarına göre $Ax = b$ formunda yazmak için gereken A matrisini bulunuz.

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

⑨ A matrisi $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ olarak verilsin. QR ayrıştırmasına göre A matrisi $A = QR$ olarak yazılabilir. Buradaki Q ve R matrislerini bulunuz.

<u>Çözüm:</u> A matrisine Gram-Schmidt algoritması uygulanarak Q ve R bulunabilir:

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix} \rightarrow a_1=\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix},\ a_2=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$

> G-S algoritması, adım $i=1$

1.1) dikgenleştirme: $\tilde{q}_1 = a_1 = \begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}$

1.2) doğrusal bağımlılık testi:
($\tilde{q}_1 = 0$ ise <u>dur</u>)

1.3) düzgeleme: $q_1 = \dfrac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|} = \dfrac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.8\\ 0.6\end{bmatrix}$

> G-S algoritması, adım $i=2$

2.1) dikgenleştirme

$$\tilde{q}_2 = a_2 - (q_1^T a_2) q_1$$

$$\tilde{q}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{q}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

2.2) doğrusal bağımlılık testi:
($\tilde{q}_2 = 0$ ise dur)

2.3) düzgeleme: $q_2 = \dfrac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1.2 \\ 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$

$$Q \triangleq [q_1 \;\; q_2] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} R_{11} \triangleq \|\tilde{q}_1\| = 5, \;\; R_{22} \triangleq \|\tilde{q}_2\| = 2 \\ R_{12} \triangleq q_1^T a_2 = -1, \;\; R_{21} \triangleq 0 \end{matrix}\right\} \; R = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$